Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Analysis
apl. Prof. Dr. Peer Christian Kunstmann
Marvin Schulz, M.Sc.

WS2022/23
30.12.2022

Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Physik

9. Übungsblatt

Aufgabe 52: [Additionstheoreme **T**]
Zeigen Sie die folgenden Identitäten.

(i) $\tan(x+y) = \frac{\tan(x)+\tan(y)}{1-\tan(x)\tan(y)}$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$ mit $x,\ y,\ x+y \notin \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}$.

(ii) $\arctan(x) + \arctan(y) = \arctan\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)$ für alle $x,\ y \in \mathbb{R}$ mit $|\arctan(x) + \arctan(y)| < \frac{\pi}{2}$.

(iii) $(\cosh(x) + \sinh(x))^n = \cosh(nx) + \sinh(nx)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $x \in \mathbb{R}$.

(iv) $\operatorname{artanh}(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ für alle $x \in (-1, 1)$.

Aufgabe 53: [Differenzieren **T**] Wir untersuchen die Funktion $f = \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} \exp(-1/x^2) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}.$$

Zeigen Sie, dass f stetig ist. Zeigen Sie, dass f differenzierbar ist und für die Ableitung gilt

$$f'(x) = \begin{cases} 2\exp(-1/x^2)x^{-3} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}.$$

Zeigen Sie, dass f' stetig ist.
Hinweis: Wir werden dieses Beispiel später aufgreifen, als eine unendlich oft stetig differenzierbare Funktion, welche sich nicht durch Ihre Taylorreihe approximieren lässt.

Aufgabe 54: Betrachten Sie die Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $g(x) = \operatorname{sgn}(x)\ln(1 + |x|)$. Beachten Sie, dass $\operatorname{sgn}(x)$ das Vorzeichen von x bezeichnet. Es ist

$$\operatorname{sgn}(x) := \begin{cases} \frac{x}{|x|} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}.$$

i) Zigen Sie: Die Funktion g ist auf $[-1, 1]$ differenzierbar.

ii) In welchen Punkten von $[-1, 1]$ ist die Funktion g zweimal differenzierbar.

Hinweis: Eine Funktion heißt zweimal differenzierbar, falls die Ableitung differenzierbar ist.

Aufgabe 55: alte Klausur-Aufgabe Seien $\alpha, \beta > 0$ und $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} \frac{(1-x^2)^2 - \alpha\cos(\beta x)}{x^2} & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

gegeben.

(a) Bestimmen Sie alle $\alpha, \beta > 0$, so dass f auf $\mathbb{R}$ stetig ist.

(b) Seien nun $\alpha = 1$ und $\beta = 2$. Berechnen Sie $f'(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$, in denen f differenzierbar ist.

Aufgabe 56: [Satz über die Umkehrfunktion **T**] Es sei $f : (-\pi/2, \pi/2) \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \frac{1}{1 + \sin(x)}.$$

Bestimmen Sie die Ableitung von f und ihrer Umkehrfunktion f^{-1}.

Aufgabe 57: [Differenzierbarkeit **T**]
Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{x + \frac{\sin(x)}{2}} & \text{für } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \\ \frac{2}{3} & \text{für } x = 0. \end{cases}$$

(a) Zeigen Sie, dass $x \mapsto x + \frac{\sin(x)}{2}$ nur in 0 eine Nullstelle hat.

(b) Berechnen Sie $f'(x)$ für alle x, in denen f differenzierbar ist.

Aufgabe 58:
Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{x + \frac{\ln(1+x^2)}{2}} & \text{für } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \\ 0 & \text{für } x = 0. \end{cases}$$

(a) Zeigen Sie, dass $x \mapsto x + \frac{\ln(1+x^2)}{2}$ nur in 0 eine Nullstelle hat.

(b) Berechnen Sie $f'(x)$ für alle x, in denen f differenzierbar ist.