Musterlösung zur A54

$g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $g(x) = \mathrm{sgn}(x) \ln(1+|x|)$

Wir zeigen, dass g auf $[-1,1]$ diff'bar ist.

$$g(x) = \begin{cases} (-1)\ln(1-x) & x<0 \\ 0 & x=0 \\ (+1)\ln(1+x) & x>0 \end{cases} \qquad \frac{1}{1-x}$$

Zunächst ist klar das für
$$\begin{cases} x<0 & g(x) = -\ln(1-x) \\ & \Rightarrow g'(x) = \frac{1}{1-x} \\ x>0 & g(x) = \ln(1+x) \\ & \Rightarrow g'(x) = \frac{1}{1+x} \end{cases}$$

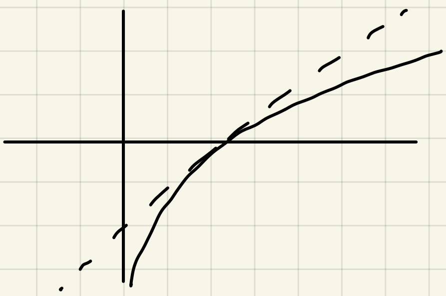
da $\ln(\cdot)$ für auf $\mathbb{R}_+$ diff'bar ist.

Es bleibt also die Differenzierbarkeit in $x=0$ zu zeigen.
Wir untersuchen also den Grenzwert

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{g(0) - g(\varepsilon)}{0 - \varepsilon} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{-g(\varepsilon)}{-\varepsilon}$$

Sei nun $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge mit $x_n \to 0$ und $x_n \neq 0$ f.f.a. $n \in \mathbb{N}$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{g(\varepsilon)}{\varepsilon} = \lim_{n\to\infty} \frac{g(x_n)}{x_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{x_n} \ln(1+|x_n|)}{|x_n| \cancel{x_n}}$$



$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(1+|x_n|)}{|x_n|}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(1+|x_n|)}{|x_n|}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\ln(1+|x_n|) - \underbrace{\ln(1+0)}_{=0}}{|x_n| - 0} \right)$$

$$= \left(\partial_t \ln(1+t) \right)\Big|_{t=0} = \left(\frac{1}{1+t} \right)\Big|_{t=0} = 1$$

Damit ist g in $x=0$ differenzierbar mit $g'(0) = 1$.

b) Wir zeigen, dass g zweimal diff bar ist. Wir haben in a) gefunden

$$g'(x) = \begin{cases} \frac{1}{1-x} & x<0 \\ 1 & x=0 \\ \frac{1}{1+x} & x>0 \end{cases} = \frac{1}{1+|x|} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Sei nun $x>0$ dann gilt $g'(x) = \frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1}$

$$\Rightarrow g''(x) = (-1)(1+x)^{-2} = \frac{-1}{(1+|x|)^2}$$

nach den üblichen Regeln der Ableitung und für $x<0$

gilt $g'(x) = \frac{1}{1-x} = (1-x)^{-1}$

$$\Rightarrow g''(x) = (-1)(1-x)^{-2}(-1) = \frac{1}{(1+|x|)^2}$$

Um die Differenzierbarkeit in $x=0$ zu klären bestimmen wir den Grenzwert

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{g'(0) - g'(\varepsilon)}{0 - \varepsilon} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1 - g'(\varepsilon)}{-\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{g'(\varepsilon) - 1}{\varepsilon}$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\frac{1}{1+|\varepsilon|} - 1}{\varepsilon}$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{-|\varepsilon|}{(1+|\varepsilon|)\varepsilon}$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{-\cancel{|\varepsilon|}}{(1+|\varepsilon|)\operatorname{sgn}(\varepsilon)\cancel{|\varepsilon|}}$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{-\operatorname{sgn}(\varepsilon)}{1+|\varepsilon|} \quad \text{"}\operatorname{sgn}(\varepsilon)^2 = 1\text{"}$$

Dieser Grenzwert existiert allerdings <u>nicht</u>

Sei hierfür zuerst $x_n := \frac{1}{n}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ dann ist $x_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$ und

$$\frac{-\operatorname{sgn}(\frac{1}{n})}{1+\frac{1}{n}} = \frac{-1}{1+\frac{1}{n}} \xrightarrow{n\to\infty} -1$$

aber gleichzeitig gilt $x_n := \frac{-1}{n}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ dann ist $x_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$ und

$$\frac{-\operatorname{sgn}(\frac{-1}{n})}{1-\frac{1}{n}} = \frac{1}{1-\frac{1}{n}} \xrightarrow{n\to\infty} 1$$

Damit ist g' in $x=0$ <u>nicht</u> differenzierbar.

<u>A55</u> Seien $\alpha, \beta > 0$ mit $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} \frac{(1-x^2)^2 - \alpha\cos(\beta x)}{x^2} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

a) Wir klären für welche Werte von $\alpha, \beta > 0$ diese Abb. stetig sind.

in $x \neq 0$ ist die Abb. nach den üblichen Argumenten stetig. Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_n \to 0$ dann ist

$$f(x_n) = \frac{(1-x_n^2)^2 - \alpha\cos(\beta x_n)}{x_n^2}$$

$$= \frac{1-\alpha\cos(\beta x_n) + x_n^4 - 2x_n^2}{x_n^2}$$

$$= \frac{1-\alpha\cos(\beta x_n)}{x_n^2} - 2 + x_n^2$$

Es gilt $f(0) = 0$.

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1-\alpha\cos(\beta\varepsilon)}{\varepsilon^2} = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1-\alpha\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{(\beta\varepsilon)^{2n}}{(2n)!}}{\varepsilon^2}$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1-\alpha\left(1-\frac{(\beta\varepsilon)^2}{2!}\right)}{\varepsilon^2} - \alpha\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n \frac{\beta^{2n}\varepsilon^{2n-2}}{(2n)!}$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0} \underbrace{\frac{1-\alpha}{\varepsilon^2}}_{\text{divergiert für } \alpha\neq 1} + \frac{\alpha\beta^2}{2} - \underbrace{\alpha\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n \frac{\beta^{2n}\varepsilon^{2n-2}}{(2n)!}}_{\xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0}$$

D.h für $\alpha\neq 1$ ex. der Grenzwert nicht.

D.h für $\alpha=1$, $\beta>0$ gilt $\lim_{\varepsilon\to 0} f(\varepsilon) = \frac{\beta^2}{2}-2$ und $f(0)=0$

damit ist f in $x=0$ nur stetig falls $\alpha=1$ und $\beta=2$.

b) Für $(\alpha,\beta)\neq(1,2)$ ist f in $x_0=0$ unstetig und damit auch nicht diffbar. in $x\neq 0$ ist die differenzierbarkeit klar. Man rechnet leicht nach, dass

$$f'(x) = \frac{abx\sin(bx)+2a\cos(bx)+2x^4-2}{x^3} \quad \text{für alle } a,b>0$$

und $x\neq 0$

Sei nun $x=0$ dann bestimmen wir im Spezialfall $a=1$, $b=2$ den Grenzwert

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{f(\varepsilon)-f(0)}{\varepsilon-0} = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{(1-\varepsilon^2)^2-\cos(2\varepsilon)}{\varepsilon^2}$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1+\varepsilon^4-2\varepsilon^2-\cos(2\varepsilon)}{\varepsilon^2}$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1-\cos(2\varepsilon)}{\varepsilon^2} + \varepsilon^2 - 2$$

Wir müssen also den Grenzwert $\frac{1-\cos(2\varepsilon)}{\varepsilon^2}$ bestimmen.

$$\frac{1-\cos(2\varepsilon)}{\varepsilon^2} = \frac{1-\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(2\varepsilon)^{2n}}{(2n)!}}{\varepsilon^2} = \frac{1-\left(1-\frac{4\varepsilon^2}{2!}\right)-\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{(2\varepsilon)^{2n}}{(2n)!}}{\varepsilon^2}$$

$$\xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 4/2! = 2$$

$$\Rightarrow \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{f(\varepsilon)-f(0)}{\varepsilon-0} = 2-2=0$$

A56, Es sei $f: (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \frac{1}{1+\sin(x)}$

Beachte, dass $1+\sin(x) \neq 0$ auf $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ und

$$f(x) = (1+\sin(x))^{-1} \Rightarrow f'(x) = -(1+\sin(x))^{-2}(1+\sin(x))'$$

$$= -(1+\sin(x))^{-2}\cos(x)$$

$$= \frac{-\cos(x)}{(1+\sin(x))^2}$$

Falls f streng monoton (wachsend oder fallend) ist gilt

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{(1+\sin(x))^2}{-\cos(x)}$$

Wir zeigen, dass f auf $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ monoton fallend ist

$f(x) = \frac{1}{1+\sin(x)}$ Wir müssen also zeigen, dass $\sin(x)$ auf $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ monoton wachsend ist.

Es ist $(\sin(x))' = \cos(x) > 0$ für $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ und damit gilt für jedes $x_0 \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+}\frac{\sin(x_0+\varepsilon)-\sin(x_0)}{\varepsilon} > 0 \Rightarrow \exists\, \delta > 0 \text{ mit}$$

$$\sin(x_0+\varepsilon)-\sin(x_0) > 0 \text{ für jedes } \varepsilon \in (x_0+\delta, x_0)$$

und damit ist $\sin(\cdot)$ auf $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ mon. wachsend.

Institut für Analysis
apl. Prof. Dr. Peer Christian Kunstmann
Marvin Schulz, M.Sc.

WS2020/21
26.01.2021

Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Physik

Lösungsvorschläge zum 9. Übungsblatt

Aufgabe 52:

(i) Seien $x, y \in \mathbb{R}$ mit $x, y, x+y \notin \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}$. Nach den Additionstheoremen (3) aus Abschnitt 7.12 des Skriptes gilt

$$\begin{aligned} \tan(x+y) &= \frac{\sin(x+y)}{\cos(x+y)} = \frac{\sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)}{\cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)} \\ &= \frac{\cos(x)\cos(y)}{\cos(x)\cos(y)} \cdot \frac{\frac{\sin(x)}{\cos(x)} + \frac{\sin(y)}{\cos(y)}}{1 - \frac{\sin(x)}{\cos(y)}\frac{\sin(y)}{\cos(y)}} = \frac{\tan(x)+\tan(y)}{1-\tan(x)\tan(y)}. \end{aligned}$$

(ii) Seien $x, y \in \mathbb{R}$ mit $|\arctan(x) + \arctan(y)| < \frac{\pi}{2}$. Definiere $X := \arctan(x)$ und $Y := \arctan(y)$. Nach Voraussetzung ist also $X, Y \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \subseteq \left(\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right)^c$. Nach Teilaufgabe (i) folgt dann

$$\tan(X+Y) = \frac{\tan(X)+\tan(Y)}{1-\tan(X)\tan(Y)}.$$

Nach Abschnitt 10.5 des Skriptes bildet tan das Intervall $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ bijektiv auf $\mathbb{R}$ ab mit der Umkehrfunktion $\arctan : \mathbb{R} \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Folglich ist $\arctan \circ \tan = \mathrm{id}_{(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})}$ und $\tan \circ \arctan = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$. Die letzte Identität impliziert

$$\begin{aligned} X+Y &= \arctan(\tan(X+Y)) = \arctan\left(\frac{\tan(X)+\tan(Y)}{1-\tan(X)\tan(Y)}\right) \\ &= \arctan\left(\frac{\tan(\arctan(x)) + \tan(\arctan(y))}{1-\tan(\arctan(x))\tan(\arctan(y))}\right) = \arctan\left(\frac{x+y}{1-xy}\right). \end{aligned}$$

(iii) Sei $n \in \mathbb{N}$ und $x \in \mathbb{R}$. Es gilt nach Definition aus Abschnitt 10.7 des Skriptes

$$\begin{aligned} (\cosh(x) + \sinh(x))^n &= \left(\frac{e^x + e^{-x}}{x} + \frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^n = (e^x)^n = e^{xn} \\ &= \left(\frac{e^{xn} + e^{-xn}}{2} + \frac{e^{xn} - e^{-xn}}{2}\right) = \cosh(xn) + \sinh(xn). \end{aligned}$$

(iv) Sei $x \in \mathbb{R}$. Nach Abschnitt 10.8 des Skriptes ist $\sinh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bijektiv. Also existiert ein eindeutig bestimmtes $X \in \mathbb{R}$ mit $x = \sinh(X)$. Ferner ist nach Abschnitt 9.12 die Exponentialabbildung $\exp : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ bijektiv mit ln als Umkehrfunktion. Es ist also $\ln \circ \exp = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$. Es gilt damit

$$\begin{aligned} \mathrm{Arsinh}(x) &= \mathrm{Arsinh}(\sinh(X)) = X = \ln(e^X) = \ln\left(\frac{e^X - e^{-X}}{2} + \frac{e^X + e^{-X}}{2}\right) \\ &= \ln\left(\sinh(X) + \cosh(X)\right). \end{aligned}$$

Mit $\cosh^2(X) - \sinh^2(X) = 1$, sowie $\cosh(x) \geq 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$ (Abschnitt 10.7 des Skriptes) folgt weiter

$$\begin{aligned}
\operatorname{Arsinh}(x) &= \ln(\sinh(X) + \cosh(X)) = \ln\left(\sinh(X) + \sqrt{\cosh^2(X)}\right) \\
&= \ln\left(\sinh(X) + \sqrt{1 + \sinh^2(X)}\right) = \ln\left(1 + \sqrt{1 + x^2}\right).
\end{aligned}$$

(v) Sei $x \in (-1, 1)$. Nach Abschnitt 10.8 des Skriptes ist $\tanh : \mathbb{R} \to (-1, 1)$ bijektiv mit Artanh als Umkehrfunktion. Sei also $X := \operatorname{Artanh}(x)$ bzw. $\tanh(X) = x$. Es gilt

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) &= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+\tanh(X)}{1-\tanh(X)}\right) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+\frac{\sinh(X)}{\cosh(X)}}{1-\frac{\sinh(X)}{\cosh(X)}}\right) \\
&= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{\cosh(X)+\sinh(X)}{\cosh(X)-\sinh(X)}\right) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{\frac{e^X+e^{-X}}{2}+\frac{e^X-e^{-X}}{2}}{\frac{e^X+e^{-X}}{2}-\frac{e^X-e^{-X}}{2}}\right) \\
&= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{e^X}{e^{-X}}\right) = \frac{1}{2}\ln(e^{2X}) = X = \operatorname{artanh}(x)
\end{aligned}$$

□

Aufgabe 53: Bitte beachte die angehängten handschriftlichen Lösungen.
Aufgabe 54: Bitte beachte die angehängten handschriftlichen Lösungen.
Aufgabe 55: Bitte beachte die angehängten handschriftlichen Lösungen.
Aufgabe 56: Bitte beachte die angehängten handschriftlichen Lösungen.

Aufgabe 57:

(a) Sei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $g(x) = x + \frac{\sin(x)}{2}$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Es ist klar, dass g auf ganz $\mathbb{R}$ differenzierbar ist. Für ihre Ableitung g' gilt

$$g'(x) = 1 + \frac{\cos(x)}{2} \geq 1 - \frac{|\cos(x)|}{2} \geq 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} > 0$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Nach einer Folgerung aus dem Mittelwertsatz (siehe (3) im Abschnitt 11.8 des Skriptes), ist g streng monoton wachsend. Da bereits $g(0) = 0$ gilt, gibt es keine weitere Nullstelle von g.

(b) Als Komposition differenzierbarer Funktionen ist f in allen $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ differenzierbar und es gilt nach den Regeln aus Abschnitt 11.2 des Skriptes

$$f'(x) = \frac{x + \frac{\sin(x)}{2} - x\left(1 + \frac{\cos(x)}{2}\right)}{\left(x + \frac{\sin(x)}{2}\right)^2} = \frac{\sin(x) - x\cos(x)}{2\left(x + \frac{\sin(x)}{2}\right)^2}$$

für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Bei $x = 0$ überprüfen wir die Definition der Differenzierbarkeit aus

Abschnitt 11.1 des Skriptes. Für den Differenzenquotienten gilt

$$\begin{aligned}\frac{f(h)-f(0)}{h} &= \frac{1}{h}\left(\frac{h}{h+\frac{\sin(h)}{2}}-\frac{2}{3}\right)=\frac{1}{h}\left(\frac{1}{1+\frac{\sin(h)}{2h}}-\frac{2}{3}\right)\\ &= \frac{1}{h}\left(\frac{1-\frac{\sin(h)}{h}}{1+\frac{\sin(h)}{2h}}\right)=\left(\frac{1}{1+\frac{\sin(h)}{2h}}\right)\left(\frac{1-\frac{\sin(h)}{h}}{h}\right)\end{aligned}$$

für alle $h\neq 0$. Nach einem Beispiel aus Abschnitt 9.4 des Skriptes gilt

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{1+\frac{\sin(h)}{2h}}=\frac{1}{1+\frac{1}{2}}=\frac{2}{3}.$$

Ferner ist

$$\left(\frac{1-\frac{\sin(h)}{h}}{h}\right)=\frac{1}{h}\left(1-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}h^{2n}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)!}h^{2n-1}\underset{\text{shift}}{\overset{\text{Index-}}{=}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+3)!}h^{2n+1}$$

für alle $h\neq 0$. Die rechte Seite dieser Gleichung ist eine Potenzreihe in h mit Konvergenzradius $R=\infty$. Diese definiert also eine auf ganz $\mathbb{R}$ stetige Funktion und es folgt

$$\lim_{h\to 0}\left(\frac{1-\frac{\sin(h)}{h}}{h}\right)=0.$$

Also ist f differenzierbar in $x=0$ und

$$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\left(\lim_{h\to 0}\frac{1}{1+\frac{\sin(h)}{2h}}\right)\cdot\left(\lim_{h\to 0}\frac{1-\frac{\sin(h)}{h}}{h}\right)=\frac{2}{3}\cdot 0=0.$$

□

Aufgabe 58:

(a) Sei $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ mit $g(x)=x+\frac{\ln(1+x^2)}{2}$ für alle $x\in\mathbb{R}$. Es ist klar, dass g auf ganz $\mathbb{R}$ differenzierbar ist. Für ihre Ableitung g' gilt

$$g'(x)=1+\frac{2x}{2(1+x^2)}=1+\frac{x}{1+x^2}\geq 1-\frac{2\,|x|}{2(1+x^2)}\geq 1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}>0$$

für alle $x\in\mathbb{R}$, wobei wir $|2x|\leq 1+x^2$ ausgenutzt haben. Nach einer Folgerung aus dem Mittelwertsatz (siehe (3) im Abschnitt 11.8 des Skriptes), ist g streng monoton wachsend. Da bereits $g(0)=0$ gilt, gibt es keine weitere Nullstelle von g.

(b) Als Komposition differenzierbarer Funktionen ist f in allen $x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ differenzierbar und es gilt nach den Regeln aus Abschnitt 11.2 des Skriptes

$$f'(x)=\frac{2x\left(x+\frac{\ln(1+x^2)}{2}\right)-x^2\left(1+\frac{x}{1+x^2}\right)}{\left(x+\frac{\ln(1+x^2)}{2}\right)^2}=\frac{x^2+x\ln(1+x^2)-\frac{x^3}{1+x^2}}{\left(x+\frac{\ln(1+x^2)}{2}\right)^2}$$

für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Bei $x = 0$ überprüfen wir die Definition der Differenzierbarkeit aus Abschnitt 11.1 des Skriptes. Für den Differenzenquotienten gilt

$$\frac{f(h) - f(0)}{h} = \frac{1}{h} \cdot \frac{h^2}{h + \frac{\ln(1+h^2)}{2}} = \frac{1}{1 + \frac{\ln(1+h^2)}{2h}}$$

für alle $h \neq 0$. Nach der Regel von l'Hospital aus (a) in Abschnitt 11.9 des Skriptes gilt

$$\lim_{h\to 0} \frac{\overbrace{\ln(1+h^2)}^{\xrightarrow{h\to 0} 0}}{\underbrace{2h}_{\xrightarrow{h\to 0} 0}} \overset{\text{l'Hospital}}{=} \lim_{h\to 0} \frac{\frac{2h}{1+h^2}}{\underbrace{2}_{\neq 0}} = \lim_{h\to 0} \frac{h}{1+h^2} = 0.$$

Also ist f differenzierbar in $x = 0$ und

$$f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \frac{1}{1 + \left(\lim_{h\to 0} \frac{\ln(1+h^2)}{2h}\right)} = 1.$$

□

Aufgabe 59:

(i) Die Funktion f ist stetig und das Intervall $I := [-3, 2]$ ist beschränkt und abgeschlossen. Nach Satz aus Abschnitt 9.15 des Skriptes, nimmt f auf I Maximum und Minimum an. Seien etwa $x_m, x_M \in I$ mit

$$f(x_m) \leq f(x) \leq f(x_M) \qquad \forall x \in I.$$

Sei $x_0 \in \{x_m, x_M\}$. Nach Definition aus Abschnitt 11.5 des Skriptes, ist x_0 ein lokales Extremum. Sei $\mathring{I} := (-3, 2)$. Es ist klar, dass f auf $\mathring{I}$ differenzierbar ist und

$$f'(x) = 4x^3 - 8x \quad \forall x \in \mathring{I}$$

gilt. Ist $x_0 \in \mathring{I}$, so gilt $f'(x_0) = 0$ nach Satz aus Abschnitt 11.6 des Skriptes. Die Nullstellen der Ableitung sind durch

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 4x^3 - 8x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee 4x^2 - 8 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x^2 = 2 \Leftrightarrow x \in \left\{0, -\sqrt{2}, \sqrt{2}\right\}$$

für alle $x \in \mathring{I}$ bestimmt. Durch Vergleich der Funktionswerte an den möglichen Extremalstellen

$$\begin{aligned} f(-3) &= (-3)^4 - 4 \cdot (-3)^2 + 2 = 81 - 4 \cdot 9 + 2 = 47, \\ f\left(-\sqrt{2}\right) &= f\left(\sqrt{2}\right) = \left(\sqrt{2}\right)^4 - 4 \cdot \left(\sqrt{2}\right)^2 + 2 = 4 - 4 \cdot 2 + 2 = -2, \\ f(0) &= 2 \quad \text{und} \\ f(2) &= 2^4 - 4 \cdot 2^2 + 2 = 2 \end{aligned}$$

folgt

$$\begin{aligned} x_m &\in \left\{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right\}, \; f(x_m) = -2 = \min\left\{f(x) : \, x \in I\right\}, \\ x_M &= -3, \; f(x_M) = 47 = \max\left\{f(x) : \, x \in I\right\}. \end{aligned}$$

(ii) Definiere $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$g(x) = \sum_{k=1}^{n} (x - a_k)^2$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Es ist klar, dass g differenzierbar ist und

$$g'(x) = \sum_{k=1}^{n} 2(x - a_k) = 2\left(\sum_{k=1}^{n} x - \sum_{m=1}^{n} a_m\right) = 2nx - 2\sum_{k=1}^{n} a_k = 2n\left(x - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k\right)$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt. Insbesondere ist

$$g'(x) \begin{cases} > 0 & \text{für } x > b, \\ = 0 & \text{für } x = b \text{ und} \\ < 0 & \text{für } x < b, \end{cases}$$

wobei $b := \sum_{k=1}^n a_k$. Nach einer Folgerung aus dem Mittelwertsatz (siehe (3) im Abschnitt 11.8 des Skriptes), ist g auf $(-\infty, b]$ streng monoton fallend und auf $[b, \infty)$ streng monoton wachsend. Also ist das Messergebnis a die Stelle b des Minimums von g.

$\square$

Aufgabe 60:

(i) Die Funktion f ist stetig. Das Intervall $I := [0, 10]$ ist beschränkt und abgeschlossen. Nach Satz aus Abschnitt 9.15 des Skriptes, nimmt f auf I Maximum und Minimum an. Seien etwa $x_m, x_M \in I$ mit

$$f(x_m) \leq f(x) \leq f(x_M) \qquad \forall x \in I.$$

Sei $x_0 \in \{x_m, x_M\}$. Nach Definition aus Abschnitt 11.5 des Skriptes, ist x_0 ein lokales Extremum. Seien $I_1 := (0, 3)$, $I_2 := (3, 10)$. Für alle $x \in I_1$ gilt

$$\begin{aligned} f(x) &= -6x + (|x-3|+2)^2 \overset{x \leq 3}{=} -6x + (3 - x + 2)^2 = -6x + (5-x)^2 \\ &= -6x + x^2 - 10x + 25 = x^2 - 16x + 25. \end{aligned}$$

Für alle $x \in I_2$ gilt

$$\begin{aligned} f(x) &= -6x + (|x-3|+2)^2 \overset{x \geq 3}{=} -6x + (x - 3 + 2)^2 = -6x + (x-1)^2 \\ &= -6x + x^2 - 2x + 1 = x^2 - 8x + 1. \end{aligned}$$

Mit diesen Darstellungen ist klar, dass f auf I_1 bzw. I_2 differenzierbar ist und

$$f'(x) = 2x - 16 \quad \forall x \in I_1, \qquad \text{sowie} \qquad f'(x) = 2x - 8 \quad \forall x \in I_2.$$

Ist $x_0 \in I_1 \cup I_2$, so gilt $f'(x_0) = 0$ nach Satz aus Abschnitt 11.6 des Skriptes. Die Nullstellen der Ableitung werden wie folgt bestimmt. Für alle $x \in I_1$ gilt

$$f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2x - 16 = 0 \Leftrightarrow x = 8 \overset{8 \notin I_1}{\Leftrightarrow} \text{falsch}.$$

Für alle $x \in I_2$ gilt hingegen

$$f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2x - 8 = 0 \Leftrightarrow x = 4.$$

Durch Vergleich der Funktionswerte an den möglichen Extremalstellen

$$\begin{aligned} f(0) &= -6 \cdot 0 + ((3-0)+2)^2 = 5^2 = 25, \\ f(3) &= -6 \cdot 3 + ((3-3)+2)^2 = -18 + 2^2 = -12, \\ f(4) &= -6 \cdot 4 + ((4-3)+2)^2 = -24 + 9 = -15 \quad \text{und} \\ f(10) &= -6 \cdot 10 + ((10-3)+2)^2 = -60 + 81 = 21 \end{aligned}$$

folgt

$$\begin{aligned} x_m &= 4,\ f(x_m) = -15 = \min\{f(x) : x \in I\}, \\ x_M &= 0,\ f(x_M) = 25 = \max\{f(x) : x \in I\}. \end{aligned}$$

(ii) O.B.d.A. sei $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_{2m+1}$. Für $j \in \{1, \ldots, 2m\}$ definiere die Intervalle $I_j := [a_j, a_{j+1}]$ und $\mathring{I}_j = (a_j, a_{j+1})$, sowie $I_0 := (-\infty, a_1]$, $\mathring{I}_0 = (-\infty, a_1)$, $I_{2m+1} := [a_{2m+1}, \infty)$ und $\mathring{I}_{2m+1} = (a_{2m+1}, \infty)$. Definiere ferner $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$g(x) = \sum_{k=1}^{2m+1} |x - a_k|$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Es ist klar, dass g stetig ist. Ferner gilt für jedes $j \in \{0, \ldots, 2m+1\}$ und jedes $x \in I_j$

$$g(x) = \sum_{k=1}^{2m+1} |x - a_k| = \sum_{k=1}^{j} |x - a_k| + \sum_{k=j+1}^{2m+1} |x - a_k| = \sum_{k=1}^{j} (x - a_k) + \sum_{k=j+1}^{2m+1} (a_k - x).$$

Folglich ist g auf jedem $\mathring{I}_j$ differenzierbar und es gilt

$$g'(x) = \sum_{k=1}^{j} 1 - \sum_{k=j+1}^{2m+1} 1 = j - ((2m+1) - (j+1) + 1) = 2j - (2m+1) \begin{cases} < 0 & \text{für } j \leq m \\ > 0 & \text{für } j > m \end{cases}$$

für alle $x \in \mathring{I}_j$. Nach einer Folgerung aus dem Mittelwertsatz (siehe (3) im Abschnitt 11.8 des Skriptes), ist g auf den Intervallen $I_0, \ldots, I_m$ streng monoton fallend und auf den Intervallen $I_{m+1}, \ldots, I_{2m+1}$ streng monoton wachsend. Also ist g auf

$$\bigcup_{j \in \{1, \ldots, m\}} I_j = (-\infty, a_{m+1}]$$

streng monoton fallend und auf

$$\bigcup_{j \in \{m+1, \ldots, 2m+1\}} I_j = [a_{m+1}, \infty)$$

streng monoton wachsend. Damit ist $a = a_{m+1}$ die gesuchte, einzige Stelle des Minimums von g.

□

Aufgabe 61:

(a) Nach der Regel von l'Hospital aus (b) im Abschnitt 11.9 der Vorlesung gilt

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\overbrace{\ln(x^2+3)}^{\xrightarrow{x \to \infty} \infty}}{\underbrace{\ln(x)}_{\xrightarrow{x \to \infty} \infty}} \overset{\text{l'Hospital}}{=} \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{2x}{x^2+3}}{\underbrace{\frac{1}{x}}_{\neq 0 \text{ für } x \neq 0}} = 2 \lim_{x \to \infty} \frac{x^2}{x^2+3} = 2 \lim_{x \to \infty} \frac{1}{1 + \frac{3}{x^2}} = 2.$$

(b) Nach der Regel von l'Hospital aus (a) im Abschnitt 11.9 der Vorlesung gilt

$$\lim_{x \to 1} \frac{\overbrace{1 + \cos(\pi x)}^{\xrightarrow{x \to 1} 0}}{\underbrace{x^2 - 2x + 1}_{\xrightarrow{x \to 1} 0}} \overset{\text{l'Hospital}}{=} \lim_{x \to 1} \frac{-\pi \sin(\pi x)}{\underbrace{2x - 2}_{\neq 0 \text{ für } x \neq 0}} = -\pi \lim_{x \to 1} \frac{\overbrace{\sin(\pi x)}^{\xrightarrow{x \to 1} 0}}{\underbrace{2x - 2}_{\xrightarrow{x \to 1} 0}} \overset{\text{l'Hospital}}{=} -\pi^2 \lim_{x \to 1} \frac{\cos(\pi x)}{\underbrace{2}_{\neq 0}} = \frac{\pi^2}{2}.$$

(c) Sinus ist für jedes $x \geq 0$ auf $[\sqrt{x}, \sqrt{x+1}]$ stetig und auf $(\sqrt{x}, \sqrt{x+1})$ differenzierbar. Nach dem Mittelwertsatz aus Abschnitt 11.7 des Skriptes, existiert ein $\xi_x \in (\sqrt{x}, \sqrt{x+1})$ mit

$$\begin{aligned}
\sin(\sqrt{x}) - \sin(\sqrt{x+1}) &= -\left(\sin(\sqrt{x+1}) - \sin(\sqrt{x})\right) = -\cos(\xi_x)(\sqrt{x+1} - \sqrt{x}) \\
&= -\cos(\xi_x)\left(\frac{x+1-x}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}\right) = -\cos(\xi_x)\left(\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}\right).
\end{aligned}$$

Folglich

$$\left|\sin(\sqrt{x}) - \sin(\sqrt{x+1})\right| = \underbrace{|-\cos(\xi_x)|}_{\leq 1}\left|\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}\right| \leq \frac{1}{2\sqrt{x}} \xrightarrow{x\to\infty} 0,$$

also

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sin(\sqrt{x}) - \sin(\sqrt{x+1})\right) = 0.$$

□

Aufgabe 62:

(a) Nach der Regel von l'Hospital aus (a) im Abschnitt 11.9 der Vorlesung gilt

$$\lim_{x\to\pi}\frac{\overbrace{\sin(\sin(x))}^{\xrightarrow{x\to\pi}0}}{\underbrace{x-\pi}_{\xrightarrow{x\to\pi}0}} \overset{\text{l'Hospital}}{=} \lim_{x\to\pi}\frac{\cos(\sin(x))\cos(x)}{\underbrace{1}_{\neq 0}} = -1.$$

(b) Nach der Regel von l'Hospital aus (a) im Abschnitt 11.9 der Vorlesung gilt

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{\overbrace{\ln(\cos(3x))}^{\xrightarrow{x\to 0}0}}{\underbrace{\ln(\cos(2x))}_{\xrightarrow{x\to 0}0}} &\overset{\text{l'Hospital}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{-3\frac{\sin(3x)}{\cos(3x)}}{\underbrace{-2\frac{\sin(2x)}{\cos(2x)}}_{\neq 0 \text{ für } x\notin\frac{\pi}{2}\mathbb{Z}}} = \frac{3}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\overbrace{\tan(3x)}^{\xrightarrow{x\to 0}0}}{\underbrace{\tan(2x)}_{\xrightarrow{x\to 0}0}} \\
&\overset{\text{l'Hospital}}{=} \frac{3}{2}\lim_{x\to 0}\frac{3(1+\tan^2(3x))}{\underbrace{2(1+\tan^2(2x))}_{\neq 0}} = \frac{9}{4}.
\end{aligned}$$

(c) Logarithmus ist für jedes $x \geq 1$ auf $[x, 1+\sqrt{1+x^2}]$ stetig und auf $(x, 1+\sqrt{1+x^2})$ differenzierbar. Nach dem Mittelwertsatz aus Abschnitt 11.7 des Skriptes, existiert ein $\xi_x \in (x, 1+\sqrt{1+x^2})$ mit

$$\begin{aligned}
x\left(\ln\left(1+\sqrt{1+x^2}\right) - \ln(x)\right) &= \frac{x}{\xi_x}\left(1+\sqrt{1+x^2} - x\right) = \frac{x}{\xi_x}\left(1+\sqrt{1+x^2} - \sqrt{x^2}\right) \\
&= \frac{x}{\xi_x}\left(1+\frac{1}{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{x^2}}\right).
\end{aligned}$$

Ferner ist

$$\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+\frac{1}{x}} = \frac{x}{1+\sqrt{1+x^2}} \leq \frac{x}{\xi_x} \leq \frac{x}{x} = 1 \qquad \text{wegen} \qquad x < \xi_x < 1+\sqrt{1+x^2}$$

und damit ist $\lim_{x\to\infty} \frac{x}{\xi_x} = 1$ als Folgerung aus dem Einschnürungssatz. Deshalb ist

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} x\left(\ln\left(1+\sqrt{1+x^2}\right) - \ln(x)\right) &= \lim_{x\to\infty} \frac{x}{\xi_x}\left(1+\frac{1}{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{x^2}}\right) \\
&= \left(\lim_{x\to\infty} \frac{x}{\xi_x}\right)\cdot\left(\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{x^2}}\right)\right) \\
&= 1.
\end{aligned}$$

□