

Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Physik**10. Übungsblatt****Aufgabe 59:** [Methode der kleinsten Quadrate **T**]

- (i) Sei $f : [-3, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ durch $f(x) = x^4 - 4x^2 + 2$ für alle $x \in [-3, 2]$ definiert. Begründen Sie, warum die Funktion f Maximum und Minimum annimmt und berechnen Sie diese.
- (ii) Für eine physikalische Größe werden bei $n \in \mathbb{N}$ Messungen die Messwerte $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ bestimmt. Als Messergebnis gibt man die Zahl $a \in \mathbb{R}$ an, die

$$\sum_{j=1}^n (a - a_j)^2 = \min \left\{ \sum_{k=1}^n (x - a_k)^2 : x \in \mathbb{R} \right\}$$

erfüllt (*Methode der kleinsten Quadrate*). Berechnen Sie a .

Aufgabe 60:

- (i) Sei $f : [0, 10] \rightarrow \mathbb{R}$ durch $f(x) = -6x + (|x - 3| + 2)^2$ für alle $x \in [0, 10]$ definiert. Begründen Sie, warum die Funktion f Maximum und Minimum annimmt und berechnen Sie diese.
- (ii) Für eine physikalische Größe werden bei $2m + 1$ Messungen mit $m \in \mathbb{N}_0$ die Messwerte $a_1, \dots, a_{2m+1} \in \mathbb{R}$ bestimmt. Als Messergebnis gibt man, alternativ zur Aufgabe 57 (ii), die Zahl a an, die

$$\sum_{j=1}^{2m+1} |a - a_j| = \min \left\{ \sum_{k=1}^{2m+1} |x - a_k| : x \in \mathbb{R} \right\}$$

erfüllt. Begründen Sie, warum a eindeutig bestimmt ist, und berechnen Sie a .

Aufgabe 61: [Taylor **T**]

- (i) Die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sei durch $f(x) = x^2 - 2x + 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$ definiert. Bestimmen Sie eine Potenzreihe, die in einer Umgebung von $x_0 = 0$ die Funktion $\frac{1}{f}$ darstellt.
- (ii) Die Funktion $g : (-1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ sei durch $g(x) = \ln(1 + x)$ für alle $x \in (-1, \infty)$ definiert. Berechnen Sie das Taylorpolynom $T_4(g; 0)$ und zeigen Sie, dass

$$0 \leq g(x) - T_4(g; 0)(x) \leq \frac{1}{5}x^5$$

für alle $x \geq 0$ gilt.

Aufgabe 62:

- (i) Die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sei durch $f(x) = x^2 + 2x - 3$ für alle $x \in \mathbb{R}$ definiert. Bestimmen Sie eine Potenzreihe, die in einer Umgebung von $x_0 = -1$ die Funktion $\frac{1}{f}$ darstellt.
- (ii) Die Funktion $g : (-1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ sei durch $g(x) = e^{-x} + \frac{1}{1+x}$ für alle $x \in (-1, \infty)$ definiert. Berechnen Sie das Taylorpolynom $T_2\left(g; \frac{1}{2}\right)$ und geben Sie eine Konstante $C > 0$ an, für die

$$\left| g(x) - T_2\left(g; \frac{1}{2}\right)(x) \right| \leq C \left| x - \frac{1}{2} \right|^3$$

für alle $x \in [0, 1]$ gilt.

Aufgabe 63: [Grenzwerte T]

Berechnen Sie die Grenzwerte

- (i) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x^2+3)}{\ln(x)}$,
- (ii) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1+\cos(\pi x)}{x^2-2x+1}$,
- (iii) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sin(\sqrt{x}) - \sin(\sqrt{x+1}))$.

Aufgabe 64:

Berechnen Sie die Grenzwerte

- (i) $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin(\sin(x))}{x-\pi}$,
- (ii) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos(3x))}{\ln(\cos(2x))}$,
- (iii) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(x \left(\ln \left(1 + \sqrt{1+x^2} \right) - \ln(x) \right) \right)$.