Institut für Analysis
apl. Prof. Dr. Peer Christian Kunstmann
Marvin Schulz, M.Sc.

WS2020/21
05.02.2021

Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Physik

Lösungsvorschläge zum 11. Übungsblatt

Aufgabe 65:

(i) Es gilt für jedes $n \in \mathbb{N}$

$$\frac{1}{n^{p+1}} \sum_{k=1}^{n} k^p = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k}{n}\right)^p = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\,|I_k| = \sigma_f(Z_n, \xi^{(n)}),$$

wobei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^p$,

$$Z_n = \left\{x_0 = 0, x_1 = \frac{1}{n}, x_2 = \frac{2}{n}, \ldots, x_n = \frac{n}{n} = 1\right\}, \qquad \xi^{(n)} = (\xi_1, \ldots, \xi_n) = (x_1, \ldots, x_n)\,.$$

Die Feinheit der äquidistanten Zerlegung Z_n des Intervalls $[0,1]$ ist $\|Z_n\| = \frac{1}{n} \xrightarrow{n\to\infty} 0$. Da $f \in R([a,b])$ nach Satz 12.5 des Skriptes, gilt $\sigma_f(Z_n, \xi^{(n)}) \xrightarrow{n\to\infty} \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ nach Satz 12.7 des Skriptes. Eine Stammfunktion von f ist durch $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{x^{p+1}}{p+1}$ gegeben. Nach dem Hauptsatz (1) aus Abschnitt 12.10 des Skriptes gilt

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = [F(x)]_{x=0}^1 = \frac{1}{p+1}.$$

(ii) Es gilt für jedes $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{k} = \frac{1}{n} \sum_{k=n}^{2n-1} \frac{n}{k} \overset{\text{Index-}}{\underset{\text{shift}}{=}} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{k+n-1} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1 + \frac{k-1}{n}} = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\,|I_k| = \sigma_f(Z_n, \xi^{(n)}),$$

wobei $f : (-1, \infty) \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{1+x}$,

$$Z_n = \left\{x_0 = 0, x_1 = \frac{1}{n}, \ldots, x_{n-1} = \frac{n-1}{n}, x_n = \frac{n}{n} = 1\right\}, \qquad \xi^{(n)} = (x_0, \ldots, x_{n-1})\,.$$

Die Feinheit der äquidistanten Zerlegung Z_n des Intervalls $[0,1]$ ist $\|Z_n\| = \frac{1}{n} \xrightarrow{n\to\infty} 0$. Da $f \in R([a,b])$ nach Satz 12.5 des Skriptes, gilt $\sigma_f(Z_n, \xi^{(n)}) \xrightarrow{n\to\infty} \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ nach Satz 12.7 des Skriptes. Eine Stammfunktion von f ist durch $F : (-1,\infty) \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \ln(1+x)$ gegeben. Nach dem Hauptsatz (1) aus Abschnitt 12.10 des Skriptes gilt

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = [F(x)]_{x=0}^1 = \ln(2).$$

$\square$

Aufgabe 66:

(i) Es gilt für jedes $n \in \mathbb{N}$

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\cos\left(\frac{k\pi}{2n}\right) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\,|I_k| = \sigma_f(Z_n, \xi^{(n)}),$$

wobei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)$,

$$Z_n = \left\{x_0 = 0, x_1 = \frac{1}{n}, x_2 = \frac{2}{n}, \dots, x_n = \frac{n}{n} = 1\right\}, \qquad \xi^{(n)} = (\xi_1, \dots, \xi_n) = (x_1, \dots, x_n)\,.$$

Die Feinheit der äquidistanten Zerlegung Z_n des Intervalls $[0,1]$ ist $\|Z_n\| = \frac{1}{n} \xrightarrow{n\to\infty} 0$. Da $f \in R([a,b])$ nach Satz 12.5 des Skriptes, gilt $\sigma_f(Z_n, \xi^{(n)}) \xrightarrow{n\to\infty} \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ nach Satz 12.7 des Skriptes. Eine Stammfunktion von f ist durch $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{2}{\pi}\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)$ gegeben. Nach dem Hauptsatz (1) aus Abschnitt 12.10 des Skriptes gilt

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = [F(x)]_{x=0}^1 = \frac{2}{\pi}.$$

(ii) Es gilt für jedes $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n}\prod_{k=1}^{n}(k+n)^{\frac{1}{n}} &= \prod_{k=1}^{n}\left(\frac{k+n}{n}\right)^{\frac{1}{n}} = \prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n}\right)^{\frac{1}{n}} = \exp\left(\ln\left(\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n}\right)^{\frac{1}{n}}\right)\right)\\
&= \exp\left(\sum_{k=1}^{n}\ln\left(\left(1+\frac{k}{n}\right)^{\frac{1}{n}}\right)\right) = \exp\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)\right)\\
&= \exp\left(\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\,|I_k|\right) = \exp\left(\sigma_f(Z_n, \xi^{(n)})\right),
\end{aligned}$$

wobei $f : (-1,\infty) \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \ln(1+x)$,

$$Z_n = \left\{x_0 = 0, x_1 = \frac{1}{n}, \dots, x_{n-1} = \frac{n-1}{n}, x_n = \frac{n}{n} = 1\right\}, \qquad \xi^{(n)} = (x_1, \dots, x_n)\,.$$

Die Feinheit der äquidistanten Zerlegung Z_n des Intervalls $[0,1]$ ist $\|Z_n\| = \frac{1}{n} \xrightarrow{n\to\infty} 0$. Da $f \in R([a,b])$ nach Satz 12.5 des Skriptes, gilt $\sigma_f(Z_n, \xi^{(n)}) \xrightarrow{n\to\infty} \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ nach Satz 12.7 des Skriptes. Da die Exponentialfunktion stetig ist, gilt $\exp\left((\sigma_f(Z_n, \xi^{(n)})\right) \xrightarrow{n\to\infty} \exp\left(\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right)$. Eine Stammfunktion von f ist durch

$$F : (-1,\infty) \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto (x+1)\ln(x+1) - x$$

gegeben (vgl. Beispiel (2) im Abschnitt 12.12 des Skriptes). Nach dem Hauptsatz (1) aus Abschnitt 12.10 des Skriptes gilt

$$\exp\left(\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right) = \exp\left([F(x)]_{x=0}^1\right) = \exp\left(2\ln(2) - 1\right) = \frac{\left(e^{\ln(2)}\right)^2}{e} = \frac{4}{e}.$$

□

Aufgabe 67:
Wir halten zunächst fest, dass jeder Integrand auf dem jeweiligen Integrationsintervall stetig ist und deshalb auch integrierbar nach Satz aus Abschnitt 12.5 des Skriptes.

(i) Es gilt

$$\begin{aligned}\int_{-2}^{2} |t-1|\,\mathrm{d}t &= \int_{-2}^{1} |t-1|\,\mathrm{d}t + \int_{1}^{2} |t-1|\,\mathrm{d}t = \int_{-2}^{1} (1-t)\mathrm{d}t + \int_{1}^{2} (t-1)\mathrm{d}t \\ &= \left[t - \frac{t^2}{2}\right]_{t=-2}^{t=1} + \left[\frac{t^2}{2} - t\right]_{t=1}^{t=2} = 5.\end{aligned}$$

(ii) Es gilt nach der Substitutionsregel aus dem Abschnitt 12.13 des Skriptes

$$\begin{aligned}\int_{1}^{4} \frac{1}{\sqrt{t}(1+\sqrt{t})}\mathrm{d}t &= \int_{1}^{4} \underbrace{\frac{1}{2\sqrt{t}}}_{=g'(t)} \underbrace{\frac{2}{1+\underbrace{\sqrt{t}}_{=g(t)}}}_{=f(g(t))}\,\mathrm{d}t = \int_{g(1)}^{g(4)} f(x)\mathrm{d}x = \int_{1}^{2} \frac{2}{1+x}\mathrm{d}x \\ &= 2\left[\ln(1+x)\right]_{x=1}^{2} = 2\left(\ln(3) - \ln(2)\right) = 2\ln\left(\frac{3}{2}\right).\end{aligned}$$

(iii) Es gilt nach der Regel der partiellen Integration aus Abschnitt 12.12 des Skriptes

$$\begin{aligned}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{\frac{1}{2}t^2}_{=g(t)} \underbrace{\sin(2t)}_{=f'(t)}\,\mathrm{d}t &\overset{\text{P.I.}}{=} -\left[\frac{1}{2}\cos(2t)\cdot\frac{1}{2}t^2\right]_{t=0}^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{2}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} t\cos(2t)\mathrm{d}t \\ &= \frac{\pi^2}{16} + \frac{1}{2}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} t\cos(2t)\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Das verbliebene Integral wird wieder partiell integriert zu

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{t}_{=g(t)} \underbrace{\cos(2t)}_{=f'(t)}\,\mathrm{d}t \overset{\text{P.I.}}{=} \left[t\cdot\frac{1}{2}\sin(2t)\right]_{t=0}^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{2}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin(2t)\mathrm{d}t = \frac{1}{4}\left[\cos(2t)\right]_{t=0}^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{1}{2}.$$

Insgesamt also

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}t^2\sin(2t)\mathrm{d}t = \frac{\pi^2}{16} - \frac{1}{4}.$$

(iv) Es gilt nach der Substitutionsregel aus dem Abschnitt 12.13 des Skriptes

$$\begin{aligned}\int_{1}^{4} \arctan\left(\sqrt{\sqrt{t}-1}\right)\mathrm{d}t &\underset{\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}=2s}{\overset{t=s^2}{=}} \int_{1}^{2} 2s\arctan\left(\sqrt{s-1}\right)\mathrm{d}s \\ &\underset{\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}x}=2x}{\overset{s=x^2+1}{=}} 4\int_{0}^{1} (x^2+1)x\arctan(x)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Weiter gilt nach der Regel der partiellen Integration aus Abschnitt 12.12 des Skriptes

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \underbrace{4(x^2+1)x}_{f'(x)}\underbrace{\arctan(x)\mathrm{d}x}_{g(x)} &= \left[(x^4+2x^2)\arctan(x)\right]_{x=0}^1 - \int_0^1 \frac{x^4+2x^2}{1+x^2}\mathrm{dx} \\
&= \frac{3}{4}\pi - \int_0^1 \frac{(1+x^2)^2-1}{1+x^2}\mathrm{dx} \\
&= \frac{3}{4}\pi + \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\mathrm{dx} - \int_0^1 1+x^2\mathrm{dx} \\
&= \frac{3}{4}\pi + [\arctan(x)]_{x=0}^{x=1} - \left[x+\frac{1}{3}x^3\right]_{x=0}^{x=1} = \pi - \frac{4}{3}.
\end{aligned}$$

□

Aufgabe 68:
Wir halten zunächst fest, dass jeder Integrand auf dem jeweiligen Integrationsintervall stetig ist und deshalb auch integrierbar nach Satz aus Abschnitt 12.5 des Skriptes.

(i) Substitutionsregel liefert

$$\int_0^1 (1+2t)^3\mathrm{d}t \underset{\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}=\frac{1}{2}}{\overset{t=\frac{s-1}{2}}{=}} \frac{1}{2}\int_1^3 s^3\mathrm{d}s = \frac{1}{8}\left[s^4\right]_{s=1}^3 = \frac{81-1}{8} = 10.$$

(ii) Partielle Integration liefert

$$\begin{aligned}
\int_1^e \underbrace{t}_{=f'(t)}\underbrace{\log(t)}_{=g(t)}\mathrm{d}t &= \left[\frac{t^2}{2}\log(t)\right]_{t=1}^{t=e} - \int_1^e \frac{t^2}{2}\frac{1}{t}\mathrm{d}t = \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2}\int_1^e t\mathrm{d}t = \frac{e^2}{2} - \frac{1}{4}\left[t^2\right]_{t=1}^e \\
&= \frac{e^2+1}{4}.
\end{aligned}$$

(iii) Die Technik des „Scharfen Hinsehens"™zusammen mit der Substitutionsregel liefert

$$\begin{aligned}
\int_1^2 \frac{t^3}{(1+t^2)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}t &= \frac{1}{2}\int_1^2 \underbrace{\frac{\overbrace{t^2}^{=g(t)}}{(1+t^2)^{\frac{3}{2}}}}_{=f(g(t))}\underbrace{2t}_{=g'(t)}\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_1^4 \frac{x}{(1+x)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\int_1^4 \frac{1+x}{(1+x)^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{(1+x)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_1^4 \frac{1}{(1+x)^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{(1+x)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}x \\
&\underset{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=1}{\overset{y=1+x}{=}} \frac{1}{2}\int_2^5 y^{-\frac{1}{2}} - y^{-\frac{3}{2}}\mathrm{d}y = [\sqrt{y}]_{y=2}^5 + \left[\frac{1}{\sqrt{y}}\right]_{y=2}^5 \\
&= \sqrt{5}-\sqrt{2}+\frac{1}{\sqrt{5}}-\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{6\sqrt{5}}{5} - \frac{3\sqrt{2}}{2}.
\end{aligned}$$

(iv) Für den Integranden gilt per Definition

$$\frac{1}{\sinh(t)\cosh(t)} = \frac{4}{(e^t-e^{-t})(e^t+e^{-t})} = \frac{4}{e^{2t}-e^{-2t}} \qquad \forall t>0.$$

Daher bietet es sich an, die Substitutionsregel zu verwenden. Man erhält

$$\begin{aligned}
\int_{\frac{\log(3)}{2}}^{\frac{\log(7)}{2}} \frac{1}{\sinh(t)\cosh(t)}\mathrm{d}t &= \int_{\frac{\log(3)}{2}}^{\frac{\log(7)}{2}} \frac{4}{e^{2t}-e^{-2t}}\mathrm{d}t \overset{t=\frac{\ln(s)}{2}}{\underset{\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}=\frac{1}{2s}}{=}} 2\int_3^7 \frac{1}{s}\cdot\frac{1}{s-\frac{1}{s}}\mathrm{d}s = 2\int_3^7 \frac{1}{s^2-1}\mathrm{d}s \\
&= \int_3^7 \frac{2}{(s-1)(s+1)}\mathrm{d}s = \int_3^7 \frac{1}{s-1} - \frac{1}{s+1}\mathrm{d}s \\
&= [\log(s-1)-\log(s+1)]_{s=3}^{s=7} = \left[\log\left(\frac{s-1}{s+1}\right)\right]_{s=3}^{s=7} \\
&= \log\left(\frac{3}{4}\right) - \log\left(\frac{1}{2}\right) = \log\left(\frac{3}{2}\right).
\end{aligned}$$

□

Aufgabe 69:

Wir halten zunächst fest, dass jeder Integrand auf dem jeweiligen Integrationsintervall stetig ist und deshalb auch integrierbar nach Satz aus Abschnitt 12.5 des Skriptes.

(i) Die Technik des „Scharfen Hinsehens“™zusammen mit der Substitutionsregel liefert

$$\int_0^1 \frac{t}{\sqrt{9-4t^2}}\mathrm{d}t = -\frac{1}{8}\int_0^1 \frac{(-8t)}{\sqrt{9-4t^2}}\mathrm{d}t = -\left[\frac{\sqrt{9-4t^2}}{4}\right]_{t=0}^1 = \frac{3}{4} - \frac{\sqrt{5}}{4} = \frac{3-\sqrt{5}}{4}.$$

(ii) Partielle Integration liefert

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{4}} \underbrace{t}_{=g(t)}\cdot\underbrace{\cos(t)}_{=f'(t)}\,\mathrm{d}t &\overset{\text{P.I.}}{=} [t\sin(t)]_{t=0}^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin(t)\mathrm{d}t = \frac{\pi}{4}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} + [\cos(t)]_{t=0}^{\frac{\pi}{4}} \\
&= \frac{\sqrt{2}\pi}{8} + \frac{\sqrt{2}}{2} - 1 = \frac{\sqrt{2}(\pi+4)-8}{8}.
\end{aligned}$$

(iii) Es gilt

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{t}{\sqrt{1-t}}\mathrm{d}t &= \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{(t-1)+1}{\sqrt{1-t}}\mathrm{d}t = -\int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{1-t}\mathrm{d}t + \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-t}}\mathrm{d}t \\
&= \frac{2}{3}\left[(1-t)^{\frac{3}{2}}\right]_{t=0}^{\frac{1}{2}} - 2\left[\sqrt{1-t}\right]_{t=0}^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3\sqrt{2}} - \frac{2}{3} + 2 - \sqrt{2} = \frac{8-5\sqrt{2}}{6}.
\end{aligned}$$

(iv) Substitutionsregel liefert

$$\int_{-\frac{\log(3)}{2}}^{\frac{\log(3)}{2}} \frac{e^t+3}{e^{2t}+1}\mathrm{d}t \overset{t=\ln(s)}{\underset{\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}=\frac{1}{s}}{=}} \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} \frac{s+3}{s^2+1}\cdot\frac{1}{s}\mathrm{d}s = \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} \frac{1}{1+s^2}\mathrm{d}s + 3\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} \frac{1}{s(s^2+1)}\mathrm{d}s.$$

Das erste Integral ist

$$\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} \frac{1}{1+s^2}\mathrm{d}s = [\arctan(s)]_{s=\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6}.$$

Für das zweite Integral beobachtet man (Partialbruchzerlegung)

$$\frac{1}{s(s^2+1)} = \frac{1}{s} - \frac{s}{s^2+1} \qquad \forall s \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

und folglich

$$\begin{aligned}\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} \frac{1}{s(s^2+1)}\mathrm{d}s &= \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} \frac{1}{s}\mathrm{d}s - \frac{1}{2}\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} \frac{2s}{1+s^2}\mathrm{d}s = [\ln(s)]_{s=\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} - \frac{1}{2}\left[\ln(1+s^2)\right]_{s=\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} \\ &= \ln(3) - \frac{1}{2}\left(2\ln(2) - 2\ln(2) + \ln(3)\right) = \frac{\ln(3)}{2}.\end{aligned}$$

Insgesamt folgt $\int_{-\frac{\log(3)}{2}}^{\frac{\log(3)}{2}} \frac{e^t+3}{e^{2t}+1}\mathrm{d}t = \frac{\pi}{6} + \frac{3}{2}\ln(3)$.

□

Aufgabe 70:

Angenommen $|f|$ ist in $x_0 \in [a,b]$ größer null. Das heißt $|f(x_0)| > 0$. Da f und somit auch $|f|$ stetig ist gilt nach dem $\varepsilon - \delta$-Kriterium für $\varepsilon = |f(x_0)|/2$ es existiert ein $\delta > 0$ mit

$$|f(x)| \in \left(\frac{|f(x_0)|}{2}, 3\frac{|f(x_0)|}{2}\right)$$

für alle $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap [a,b] =: I_\delta(x_0)$. Insbesondere gilt also $f(x) \geq \frac{|f(x_0)|}{2}$ für jedes $x \in I_\delta(x_0) \subset [a,b]$ und $|I_\delta(x_0)| > 0$.
Beachte: der Grund weshalb wir mit $[a,b]$ schneiden ist, dass die Funktion nur auf $[a,b]$ stetig ist und x_0 könnte an den Rändern des Intervalls liegen. Es ist nun einfach einen Widerspruch zur Annahme, dass das Integral positiv ist zu erzeugen. Es ist

$$\begin{aligned}\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{dx} &= \int_{[a,b]\setminus I_\delta(x_0)} |f(x)|\,\mathrm{dx} + \int_{I_\delta(x_0)} |f(x)|\,\mathrm{dx} \\ &\geq \int_{I_\delta(x_0)} |f(x)|\,\mathrm{dx} \geq \frac{|f(x_0)|}{2}\int_{I_\delta(x_0)} 1\mathrm{dx} \geq \frac{|f(x_0)|}{2}\,|I_\delta(x_0)| > 0.\end{aligned}$$

Aufgabe 71:

(i) Wir beobachten, dass für jedes $x \in [0,1]$ und jedes $n \in \mathbb{N}$

$$|f_n(x)| = \frac{1}{n^2}\left|\frac{2n^3x^2}{(1+n^3x^2)^2}\right| = \frac{1}{n^2}\left|g(n^3x^2)\right| \leq \frac{1}{n^2}\,\|g\|_\infty\,,$$

wobei $g : [0,\infty) \to \mathbb{R}$, $y \mapsto \frac{2y}{(1+y)^2}$. Wegen

$$\left|\frac{2y}{(1+y)^2}\right| = 1 - \frac{y^2+1}{(1+y)^2} \leq 1 \qquad \forall y \in [0,\infty),$$

ist $\|g\|_\infty \leq 1$. Also ist $f_n \rightrightarrows 0$ auf $[0,1]$ für $n \to \infty$. Nach Satz im Abschnitt 12.15 des Skriptes gilt

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)\mathrm{d}x = 0.$$

(ii) Es gilt

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{1}{1+nx}\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\ln(1+nx)\right]_{x=0}^1 = \lim_{n\to\infty}\frac{\overbrace{\ln(1+n)}^{\to\infty}}{\underbrace{n}_{\to\infty}} \overset{\text{l'Hospital}}{=} \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{1+n}}{\underbrace{1}_{\neq 0}} = 0.$$

□

http://www.math.kit.edu/iana1/lehre/hm1phys2016w/