Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Analysis
apl. Prof. Dr. Peer Christian Kunstmann
Marvin Schulz, M.Sc.

WS2020/21
01.02.2021

Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Physik

Lösungsvorschläge zum 12. Übungsblatt

Aufgabe 72:
Bei der DGL handelt es sich um eine Differentialgleichung mit getrennten Veränderlichen (siehe Abschnitt 13.4 des Skriptes). Betrachte zunächst den Fall $|u_0| < 1$ und löse formal

$$\begin{aligned} u' &= t\sqrt{1-u^2} \\ \Rightarrow \int_0^t \frac{u'(s)}{\sqrt{1-u^2(s)}}\mathrm{d}s = \int_{u_0}^{u(t)} \frac{1}{\sqrt{1-\eta^2}}\mathrm{d}\eta &= \int_0^t s\mathrm{d}s \\ \Rightarrow [\arcsin(\eta)]_{\eta=u_0}^{u(t)} &= \frac{t^2}{2} \\ \Rightarrow u(t) &= \sin\left(\frac{t^2}{2} + \arcsin(u_0)\right). \end{aligned}$$

Diese Lösungsformel kann nicht für alle $t \in \mathbb{R}$ gültig sein, denn wegen der DGL muss u monoton wachsend für $t \geq 0$ und monoton fallend für $t \leq 0$ sein. Tatsächlich gilt sie auf dem größten Intervall I, welches die Startstelle 0 enthält und auf dem $\sqrt{1-u^2}$ nicht verschwindet (vgl. Abschnitt 13.4 des Skriptes), also

$$I = (-a, a), \quad \text{wobei} \quad a = \sqrt{\pi - 2\arcsin(u_0)}.$$

$$u(t) = \begin{cases} \sin\left(\frac{t^2}{2} + \arcsin(u_0)\right), & \text{falls } |t| < a, \\ 1 & \text{sonst} \end{cases} \qquad \forall t \in \mathbb{R}$$

der einzige Kandidat für eine maximale Lösung des AWPs. Tatsächlich ist die Fortsetzung in a stetig und wegen

$$\lim_{t\to a-} u'(t) = \lim_{t\to a-} 2t\cos\left(\frac{t^2}{2} + \arcsin(u_0)\right) = 2a\underbrace{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}_{=0} = 0 = \lim_{t\to a+} u'(t)$$

differenzierbar. Wegen Symmetrie gilt das auch für $-a$. Schließlich ist die DGL auf ganz $\mathbb{R}$ erfüllt.

Falls $u_0 = 1$, ist $u : \mathbb{R} \to [-1, 1]$, $t \mapsto 1$ die eindeutige, maximale Lösung des AWPs: Natürlich ist u eine maximale Lösung. Angenommen, es gäbe eine weitere Lösung $\tilde{u} : I \to [-1, 1]$. Wegen der bereits erwähnten Monotonie, nimmt $\tilde{u}$ in $t = 0$ sein globales Minimum $u_0 = 1$ an. Also gilt tatsächlich $\tilde{u} = u|_I \equiv 1$.

Falls $u_0 = -1$, ist $u \equiv -1$ eine maximale Lösung. Falls eine Lösung von dieser Konstanten (nach oben) abweicht, kann man ihre Gestalt wieder mit der Trennung der Veränderlichen berechnen (vgl. den Fall $|u_0| < 1$). Also hat jede Lösung die Gestalt

$$u(t) = \begin{cases} 1 & \text{für } t \leq -\sqrt{2\pi + t_1^2}, \\ \sin\left(\frac{t^2}{2} - \frac{t_1^2}{2} - \frac{\pi}{2}\right) & \text{für } -\sqrt{2\pi + t_1^2} < t \leq -t_1, \\ -1 & \text{für } -t_1 < t \leq t_2, \\ \sin\left(\frac{t^2}{2} - \frac{t_2^2}{2} - \frac{\pi}{2}\right) & \text{für } t_2 < t \leq \sqrt{2\pi + t_2^2}, \\ 1 & \text{für } \sqrt{2\pi + t_2^2} \leq t \end{cases} \qquad \forall t \in \mathbb{R}$$

mit beliebigen Konstanten $t_1, t_2 \in [0, \infty]$. $\square$

Aufgabe 73:

(i) Es handelt sich bei der Differentialgleichung um eine Differentialgleichung mit getrennten Veränderlichen. Löse formal (vgl. Abschnitt 13.4 des Skriptes)

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= -e^y \frac{1}{1+x^2} \\ \rightsquigarrow e^{-y}\mathrm{d}y &= \frac{-1}{1+x^2}\mathrm{d}x \\ \rightsquigarrow \int_{-\ln(\pi/4)}^{y(x)} e^{-\eta}\mathrm{d}\eta &= \int_0^x \frac{1}{1+\xi^2}\mathrm{d}\xi \\ \Rightarrow -\left[e^{-\eta}\right]_{\eta=-\ln(\pi/4)}^{y(x)} &= -\left[\arctan(\xi)\right]_{\xi=0}^x \\ \Leftrightarrow e^{-y(x)} &= \arctan(x) + \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

Beachte, dass wir nun den logarithmus bilden wollen. Die rechte seite ist positiv falls $x > \tan(-\pi/4) = -1$¸ Damit ist $y : (-1, \infty) \to \mathbb{R}$ mit $y(x) = \ln(\arctan(x) + \frac{\pi}{4})$ die maximale Lösung.

(ii) Es handelt sich bei der Differentialgleichung um eine lineare Differentialgleichung erster Ordnung (siehe Abschnitt 13.3 des Skriptes). Berechne

$$A(x) = \int_0^x 2t\mathrm{d}t = x^2,$$

sowie

$$\int_0^x e^{-A(s)} s\mathrm{d}s = \left[-\frac{1}{2}e^{-s^2}\right]_{s=0}^x = \frac{1}{2}\left(1 - e^{-t^2}\right).$$

Nach der Variation-der-Konstanten-Formel ist

$$y(x) = \frac{1}{2}e^{x^2} + e^{x^2}\int_0^t e^{-s^2} s\mathrm{d}s = e^{x^2} - \frac{1}{2}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ die maximale Lösung des Anfangswertproblems.

$\square$

Aufgabe 74:

(i) Es handelt sich bei der Differentialgleichung um eine Differentialgleichung mit getrennten Veränderlichen. Löse formal (vgl. Abschnitt 13.4 des Skriptes)

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= xe^{-x}y^2 \\
\rightsquigarrow \frac{1}{y^2}\mathrm{d}y &= xe^{-x}\mathrm{d}x \\
\rightsquigarrow \int_1^{y(x)} \frac{1}{\eta^2}\mathrm{d}\eta &= \int_0^x \xi e^{-\xi}\mathrm{d}\xi \\
\Rightarrow -\left[\frac{1}{\eta}\right]_{\eta=1}^{y(x)} &= -\left[\xi e^{-\xi}\right]_{\xi=0}^x + \int_0^x e^{-\xi}\mathrm{d}\xi = -\left[\xi e^{-\xi}\right]_{\xi=0}^x - \left[e^{-\xi}\right]_{\xi=0}^x \\
\Leftrightarrow y(x) &= \frac{e^x}{1+x}.
\end{aligned}$$

Dabei ist $x \in I = (-1, \infty)$ — das größte Intervall mit $0 \in I$ und $y(x) \neq 0$ für alle $x \in I$.

Dieses y ist die maximale Lösung, denn y lässt sich wegen $\lim_{x\to -1+} y(x) = \infty$ nicht stetig nach links fortsetzen.

(ii) Es handelt sich bei der Differentialgleichung um eine lineare homogene Differentialgleichung erster Ordnung (siehe Abschnitt 13.3 des Skriptes). Berechne

$$A(x) := \int_0^x s + \frac{2}{1+s^2}\mathrm{d}s = \left[\frac{1}{2}s^2 + 2\arctan(s)\right]_{s=0}^x = \frac{x^2}{2} + 2\arctan(x).$$

Nach der Variation-der-Konstanten-Formel ist

$$y(x) = e^{\frac{x^2}{2}+2\arctan(x)}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ die maximale Lösung des Anfangswertproblems.

□

Aufgabe 75:

(i) Es handelt sich bei der Differentialgleichung um eine Differentialgleichung mit getrennten Veränderlichen. Löse formal

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= -y^2 \\
\rightsquigarrow \mathrm{d}y\frac{1}{y^2} &= -\mathrm{d}x \\
\rightsquigarrow \int_{y(0)}^{y(x)} \frac{1}{\eta^2}\mathrm{d}\eta &= -\int_0^x \mathrm{d}\xi \\
\Rightarrow -\left[\frac{1}{\eta}\right]_{\eta=-1}^{y(x)} &= -x \\
\Leftrightarrow \frac{1}{y(x)} &= x-1 \\
\Leftrightarrow y(x) &= \frac{1}{x-1}.
\end{aligned}$$

Die obige Formel gilt auf dem größten Intervall I mit $0 \in I$, $-(y(x))^2 \neq 0$ und $x - 1 < 0$ für alle $x \in I$ — also $I = (-\infty, 1)$. Wegen $\lim_{x \to 1} y(x) = -\infty$, ist y nicht weiter nach rechts fortsetzbar und I ist das maximale Existenzintervall.

(ii) Die Differentialgleichung ist eine lineare Differentialgleichung. Ihre Lösung ist durch die Variation-der-Konstanten-Formel

$$y(x) = e^{\int_0^x 1 \mathrm{d}\xi} \cdot y(0) + e^{\int_0^x 1 \mathrm{d}\xi} \int_0^x e^{-\int_0^\eta 1 \mathrm{d}\xi}(1+\eta)\mathrm{d}\eta$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ gegeben. Berechne

$$\begin{aligned} \int_0^x 1 \mathrm{d}\xi &= x, \\ \int_0^x \underbrace{e^{-\eta}}_{=f'(\eta)} \underbrace{(1+\eta)}_{=g(\eta)} \mathrm{d}\eta &\overset{\text{Part. Int.}}{=} -\left[e^{-\eta}(1+\eta)\right]_{\eta=0}^x + \int_0^x e^{-\eta}\mathrm{d}\eta \\ &= 1 - (1+x)e^{-x} - \left[e^{-\eta}\right]_{\eta=0}^x = 2 - (2+x)e^{-x} \end{aligned}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Folglich ist $y(x) = 2e^x - 2 - x$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

□

Aufgabe 76:

(i) Es handelt sich bei der Differentialgleichung um eine Differentialgleichung mit getrennten Veränderlichen. Löse formal

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= \frac{\sin(y)}{x} \\ \rightsquigarrow \mathrm{d}y \frac{1}{\sin(y)} &= \frac{1}{x}\mathrm{d}x \\ \rightsquigarrow \int_{\frac{\pi}{2}}^{y(x)} \frac{1}{\sin(\eta)}\mathrm{d}\eta &= \int_{\frac{1}{2}}^x \frac{1}{\xi}\mathrm{d}\xi \\ \overset{\text{vgl. A66(iv)}}{\Leftrightarrow} \left[\ln\left(\tan\left(\frac{\eta}{2}\right)\right)\right]_{\eta=\frac{\pi}{2}}^{y(x)} &= [\ln(\xi)]_{\xi=\frac{1}{2}}^x \\ \Leftrightarrow \ln\left(\tan\left(\frac{y(x)}{2}\right)\right) &= \ln(2x) \\ \Leftrightarrow y(x) &= 2\arctan(2x). \end{aligned}$$

Die obige Formel gilt auf dem größten Intervall I mit $\frac{\pi}{2} \in I$, $\sin(y(x)) \neq 0$ und $0 < x$ für alle $x \in I$ (letzte Einschränkung kommt von der DGL). Wegen

$$0 < y(x) = 2\arctan(2x) < \pi$$

ist $I = (0, \infty)$. Dies ist das maximale Existenzintervall.

(ii) Die Differentialgleichung ist eine lineare Differentialgleichung. Ihre Lösung ist durch die Variation-der-Konstanten-Formel

$$y(x) = e^{-\int_0^x \frac{2}{1-\xi}\mathrm{d}\xi} \cdot y(0) + e^{-\int_0^x \frac{2}{1-\xi}\mathrm{d}\xi} \int_0^x e^{\int_0^\eta \frac{2}{1-\xi}\mathrm{d}\xi} \frac{1}{1-\eta}\mathrm{d}\eta$$

für alle $x \in (-\infty, 1)$ gegeben.

Es gilt

$$\begin{aligned} -\int_0^x \frac{2}{1-\xi}\mathrm{d}\xi &= [2\ln(1-\xi)]_{\xi=0}^x = 2\ln(1-x), \\ \int_0^x e^{-2\ln(1-\eta)}\frac{1}{1-\eta}\mathrm{d}\eta &= \int_0^x \frac{1}{(1-\eta)^3}\mathrm{d}\eta = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{(1-\eta)^2}\right]_{\eta=0}^x = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{(1-x)^2} - 1\right) \end{aligned}$$

für alle $x \in (-\infty, 1)$. Folglich ist $y(x) = \frac{1-(1-x)^2}{2}$ für alle $x \in (-\infty, 1)$.

□