

## Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Physik

### Lösungsvorschläge zum 12. Übungsblatt

#### Aufgabe 77:

- (i) Es handelt sich bei der Differentialgleichung um eine lineare, inhomogene Differentialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten (siehe Abschnitt 13.5 des Skriptes). Das charakteristische Polynom ist durch

$$p(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda + 2 \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}$$

gegeben und hat genau die Nullstellen  $\lambda_1 = (-1 - i)$  und  $\lambda_2 = \overline{\lambda_1} = (-1 + i)$ , jeweils mit Vielfachheit eins. Die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung lautet daher

$$y_h(x) = C_1 e^{-x} \cos(x) + C_2 e^{-x} \sin(x) \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

mit freien Konstanten  $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ .

Für eine partikuläre Lösung  $y_p$  der inhomogenen Gleichung machen wir den Ansatz „von der Form der rechten Seite“

$$y_p(x) = x e^{-x} [C_1 \cos(x) + C_2 \sin(x)]$$

und berechnen

$$\begin{aligned} y_p'(x) &= e^{-x} [-(C_1 x \cos(x) + C_2 x \sin(x)) + (C_1 \cos(x) + C_2 \sin(x))] \\ &\quad + (-x C_1 \sin(x) + x C_2 \cos(x)) \\ &= e^{-x} [C_1 \cos(x) + C_2 \sin(x) + (C_2 - C_1)x \cos(x) - (C_1 + C_2)x \sin(x)], \\ y_p''(x) &= e^{-x} [-(C_1 \cos(x) + C_2 \sin(x) + (C_2 - C_1)x \cos(x) - (C_1 + C_2)x \sin(x))] \\ &\quad + (-C_1 \sin(x) + C_2 \cos(x)) + (C_2 - C_1)(\cos(x) - x \sin(x)) \\ &\quad - (C_1 + C_2)(\sin(x) + x \cos(x)) \\ &= e^{-x} [2(C_2 - C_1) \cos(x) - 2(C_1 + C_2) \sin(x) - 2C_2 x \cos(x) + 2C_1 x \sin(x)]. \end{aligned}$$

Einsetzen in die Differentialgleichung liefert

$$\begin{aligned} y_p''(x) + 2y_p'(x) + 2y_p(x) &= e^{-x} \cos(x) \\ \Leftrightarrow (2(C_2 - C_1) \cos(x) - 2(C_1 + C_2) \sin(x) - 2C_2 x \cos(x) + 2C_1 x \sin(x)) \\ &\quad + 2(C_1 \cos(x) + C_2 \sin(x) + (C_2 - C_1)x \cos(x) - (C_1 + C_2)x \sin(x)) \\ &\quad + 2(C_1 x \cos(x) + C_2 x \sin(x)) &= \cos(x) \\ \Leftrightarrow 2C_2 \cos(x) - 2C_1 \sin(x) &= \cos(x) \\ \Leftrightarrow (2C_2 - 1) \cos(x) - 2C_1 \sin(x) &= 0. \end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich ergibt  $C_1 = 0$  und  $C_2 = \frac{1}{2}$ . Damit ist  $y_p(x) = \frac{x}{2} \sin(x) e^{-x}$  eine partikuläre Lösung der inhomogenen Differentialgleichung.

Die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung lautet also

$$y(x) = C_1 e^{-x} \cos(x) + C_2 e^{-x} \sin(x) + \frac{x}{2} \sin(x) e^{-x} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

mit freien Konstanten  $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ . Diese werden wie folgt durch die Anfangsbedingungen festgelegt

$$\begin{aligned} y(0) &= \left[ C_1 e^{-x} \cos(x) + C_2 e^{-x} \sin(x) + \frac{x}{2} \sin(x) e^{-x} \right]_{x=0} = C_1 \stackrel{!}{=} 0 \\ \Rightarrow C_1 &= 0, \\ y'(0) &= \left[ C_2 e^{-x} (\cos(x) - \sin(x)) + \frac{1}{2} e^{-x} (-x \sin(x) + \sin(x) + x \cos(x)) \right]_{x=0} = C_2 \stackrel{!}{=} 0 \\ \Rightarrow C_2 &= 0 \end{aligned}$$

Also ist  $y = y_p$  die eindeutig bestimmte Lösung des Anfangswertproblems.

- (ii) Es handelt sich bei der Differentialgleichung um eine lineare, inhomogene Differentialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten (siehe Abschnitt 13.5 des Skriptes). Das charakteristische Polynom ist durch

$$q(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 1 \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}$$

gegeben und hat genau eine doppelte Nullstelle  $\lambda_1 = 1$ . Die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung lautet daher

$$y_h(x) = C_1 e^x + C_2 x e^x \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

mit freien Konstanten  $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ .

Für eine partikuläre Lösung  $y_p$  der inhomogenen Gleichung machen wir den Ansatz „von der Form der rechten Seite“

$$y_p(x) = C x^2 e^x$$

und berechnen

$$\begin{aligned} y_p'(x) &= C e^x (x^2 + 2x), \\ y_p''(x) &= C e^x (x^2 + 2x + 2x + 2) \\ &= C e^x (x^2 + 4x + 2). \end{aligned}$$

Einsetzen in die Differentialgleichung liefert

$$\begin{aligned} y_p''(x) - 2y_p'(x) + y_p(x) &= e^x \\ \Leftrightarrow C((x^2 + 4x + 2) - 2(x^2 + 2x) + x^2) &= 1 \\ \Leftrightarrow 2C &= 1 \\ \Leftrightarrow C &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Damit ist  $y_p(x) = \frac{x^2}{2} e^x$  eine partikuläre Lösung der inhomogenen Differentialgleichung.

Die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung lautet also

$$y(x) = C_1 e^x + C_2 x e^x + \frac{x^2}{2} e^x \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

mit freien Konstanten  $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ . Diese werden wie folgt durch die Anfangsbedingungen festgelegt

$$\begin{aligned} y(0) &= \left[ C_1 e^x + C_2 x e^x + \frac{x^2}{2} e^x \right]_{x=0} = C_1 \stackrel{!}{=} 1 \\ \Rightarrow C_1 &= 1, \\ y'(0) &= \left[ e^x + C_2(x+1)e^x + \left( \frac{x^2}{2} + x \right) e^x \right]_{x=0} = 1 + C_2 \stackrel{!}{=} 2 \\ \Rightarrow C_2 &= 1. \end{aligned}$$

Also die eindeutig bestimmte Lösung des Anfangswertproblems durch  $y(x) = e^x \left( 1 + x + \frac{x^2}{2} \right)$  für alle  $x \in \mathbb{R}$  gegeben.

□

### Aufgabe 78:

- (i) Es handelt sich bei der Differentialgleichung um eine lineare, inhomogene Differentialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten (siehe Abschnitt 13.5 des Skriptes). Das charakteristische Polynom ist durch

$$p(\lambda) = \lambda^2 + \lambda + \frac{1}{4} \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}$$

gegeben und hat genau eine doppelte Nullstelle  $\lambda_1 = -\frac{1}{2}$ . Die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung lautet also

$$y_h(x) = C_1 e^{-\frac{x}{2}} + C_2 x e^{-\frac{x}{2}} \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

mit freien Konstanten  $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ .

Für eine partikuläre Lösung  $y_p$  der inhomogenen Gleichung machen wir den Ansatz „von der Form der rechten Seite“

$$y_p(x) = C x^2 e^{-\frac{x}{2}}$$

und berechnen

$$\begin{aligned} y_p'(x) &= C e^{-\frac{x}{2}} \left( 2x - \frac{x^2}{2} \right), \\ y_p''(x) &= C e^{-\frac{x}{2}} \left( (2-x) - \frac{1}{2} \left( 2x - \frac{x^2}{2} \right) \right) \\ &= C e^{-\frac{x}{2}} \left( \frac{x^2}{4} - 2x + 2 \right). \end{aligned}$$

Einsetzen in die Differentialgleichung liefert

$$\begin{aligned} y_p''(x) + y_p'(x) + \frac{y_p(x)}{4} &= e^{-\frac{x}{2}} \\ e^{-\frac{x}{2}} \stackrel{\neq 0}{\Leftrightarrow} C \left( \left( \frac{x^2}{4} - 2x + 2 \right) + \left( 2x - \frac{x^2}{2} \right) + \frac{x^2}{4} \right) &= 1 \\ \Leftrightarrow 2C &= 1 \\ \Leftrightarrow C &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Damit ist  $y_p(x) = \frac{x^2}{2}e^{-\frac{x}{2}}$  eine partikuläre Lösung der inhomogenen Differentialgleichung.

Die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung lautet also

$$y(x) = C_1 e^{-\frac{x}{2}} + C_2 x e^{-\frac{x}{2}} + \frac{x^2}{2} e^{-\frac{x}{2}} \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

mit freien Konstanten  $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ . Diese werden wie folgt durch die Anfangsbedingungen festgelegt

$$\begin{aligned} y(0) &= \left[ C_1 e^{-\frac{x}{2}} + C_2 x e^{-\frac{x}{2}} + \frac{x^2}{2} e^{-\frac{x}{2}} \right]_{x=0} = C_1 \stackrel{!}{=} 1 \\ \Rightarrow C_1 &= 1, \\ y'(0) &= \left[ -\frac{1}{2} e^{-\frac{x}{2}} + C_2 \left(1 - \frac{x}{2}\right) e^{-\frac{x}{2}} + \left(-\frac{x^2}{4} + x\right) e^{-\frac{x}{2}} \right]_{x=0} = C_2 - \frac{1}{2} \stackrel{!}{=} 1 \\ \Rightarrow C_2 &= \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Also ist

$$y(x) = \left(1 + \frac{3x + x^2}{2}\right) e^{-\frac{x}{2}} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

die eindeutig bestimmte Lösung des Anfangswertproblems.

- (ii) Es handelt sich bei der Differentialgleichung um eine lineare, inhomogene Differentialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten (siehe Abschnitt 13.5 des Skriptes). Das charakteristische Polynom ist durch

$$p(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda = \lambda(\lambda - 2) \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}$$

gegeben und hat genau die Nullstellen  $\lambda_1 = 0$  und  $\lambda_2 = 2$ , jeweils mit Vielfachheit eins. Die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung lautet also

$$y_1(x) = C_1 + C_2 e^{2x} \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

mit freien Konstanten  $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ .

Setze  $f_1(x) = -2x$ ,  $f_2(x) = \sin(2x)$  für alle  $x \in \mathbb{R}$ . Bestimme partikuläre Lösungen für die Inhomogenitäten  $f_1$  bzw.  $f_2$  jeweils durch einen Ansatz „von der Form der rechten Seite“.

- $f_1$  (Nullstelle des charakteristischen Polynoms): Mache Ansatz

$$y_p^{(1)}(x) = x(a_0 + a_1 x) = a_0 x + a_1 x^2 \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Einsetzen in die Differentialgleichung liefert

$$\begin{aligned} y_p^{(1)''}(x) - 2y_p^{(1)'}(x) &= f_1(x) \Leftrightarrow 2a_1 - 2a_0 - 4a_1 x = -2x \\ \text{Koeff.-Vergleich} \Leftrightarrow -4a_1 &= -2 \quad \wedge \quad 2a_1 - 2a_0 = 0 \\ a_1 &= \frac{1}{2} \quad \wedge \quad a_0 = a_1 = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Also ist  $y_p^1(x) = \frac{x(1+x)}{2}$  für alle  $x \in \mathbb{R}$  eine partikuläre Lösung zur Inhomogenität  $f_1$ .

- $f_2$  (keine Nullstelle des charakteristischen Polynoms): Mache Ansatz

$$y_p^{(2)}(x) = (a_0 \cos(2x) + a_1 \sin(2x)) \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Einsetzen in die Differentialgleichung liefert

$$\begin{aligned} y_p^{(2)''}(x) - 2y_p^{(2)'}(x) &= f_2(x) \\ \Leftrightarrow -4a_0 \cos(2x) - 4a_1 \sin(2x) + 4a_0 \sin(2x) - 4a_1 \cos(2x) &= \sin(2x) \\ \text{Koeff.-Vergleich} \Leftrightarrow -4a_0 - 4a_1 &= 0 \quad \wedge \quad -4a_1 + 4a_0 = 1 \\ a_0 &= -a_1 \quad \wedge \quad a_0 = \frac{1}{8}. \end{aligned}$$

Also ist  $y_p^{(2)}(x) = \frac{1}{8}(\cos(2x) - \sin(2x))$  für alle  $x \in \mathbb{R}$  eine partikuläre Lösung zur Inhomogenität  $f_2$ .

Insgesamt ist

$$y(x) = C_1 + C_2 e^{2x} + \frac{x(1+x)}{2} + \frac{1}{8}(\cos(2x) - \sin(2x)) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

die allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung mit freien Konstanten  $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ . Diese werden wie folgt durch die Anfangsbedingungen festgelegt

$$\begin{aligned} y(0) &= C_1 + C_2 + \frac{1}{8} \stackrel{!}{=} \frac{1}{8} \\ \Rightarrow C_1 &= -C_2, \\ y'(0) &= \left[ 2C_2 e^{2x} + \frac{1}{2} + x - \frac{1}{4}(\sin(2x) + \cos(2x)) \right]_{x=0} = 2C_2 + \frac{1}{4} \stackrel{!}{=} 0 \\ \Rightarrow C_2 &= -\frac{1}{8}. \end{aligned}$$

Also ist

$$y(x) = \frac{1 - e^{2x}}{8} + \frac{x(1+x)}{2} + \frac{1}{8}(\cos(2x) - \sin(2x)) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

die eindeutig bestimmte Lösung des Anfangswertproblems.

□

### Aufgabe 79:

- (i) Für jedes  $b > 2$  gilt

$$\int_2^b \frac{1}{x(\ln(x))^2} dx \stackrel{x=e^y}{dx=xdys} \int_{\ln(2)}^{\ln(b)} \frac{1}{y^2} dy = - \left[ \frac{1}{y} \right]_{y=\ln(2)}^{\ln(b)} = \frac{1}{\ln(2)} - \frac{1}{\ln(b)}.$$

Folglich ist das uneigentliche Integral  $\int_2^\infty \frac{1}{x(\ln(x))^2} dx$  konvergent und es gilt

$$\int_2^\infty \frac{1}{x(\ln(x))^2} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_2^b \frac{1}{x(\ln(x))^2} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{\ln(2)} - \frac{1}{\ln(b)} \right) = \frac{1}{\ln(2)}.$$

(ii) Für alle  $0 < x \leq 1$  gilt  $x^2 < x < \sqrt{x}$ . Damit folgt

$$0 < \left| \frac{1}{2\sqrt{x} - x^2} \right| = \frac{1}{\sqrt{x} + \underbrace{(\sqrt{x} - x^2)}_{>0}} < \frac{1}{\sqrt{x}}$$

für alle  $0 < x \leq 1$ . Sei  $0 < a < 1$ . Es gilt

$$\int_a^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2 [\sqrt{x}]_{x=a}^1 = 2 - 2\sqrt{a} \xrightarrow{a \rightarrow 0^+} = 2.$$

Also ist das uneigentliche Integral  $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$  konvergent. Nach dem Majorantenkriterium aus Abschnitt 14.4 des Skriptes ist auch das Integral  $\int_0^1 \frac{1}{2\sqrt{x-x^2}} dx$  (absolut) konvergent.

(iii) Für alle  $x \in [1, \infty)$  gilt  $1 + \frac{1}{2} \cos^{2017}(x) \geq \frac{1}{2}$  und folglich  $\frac{1 + \frac{1}{2} \cos^{2017}(x)}{x} \geq \frac{1}{2x} > 0$ . Ferner ist

$$\int_1^\infty \frac{1}{2x} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \frac{1}{2x} dx = \frac{1}{2} \lim_{b \rightarrow \infty} [\ln(x)]_{x=1}^b = \frac{1}{2} \lim_{b \rightarrow \infty} \ln(b) = \infty.$$

Nach dem Minorantenkriterium für uneigentliche Integrale aus Abschnitt 14.4 des Skriptes ist auch das uneigentliche Integral  $\int_1^\infty \frac{1 + \frac{1}{2} \cos^{2017}(x)}{x} dx$  divergent.

□

### Aufgabe 80:

(i) Für jedes  $x \in (0, \pi)$  gilt

$$\frac{1}{\sin(x)} - \frac{1}{x} = \frac{x - \sin(x)}{x \sin(x)} = \frac{x - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}}{x \sin(x)} = \frac{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k+1)!} x^{2k-1}}{\frac{\sin(x)}{x}}.$$

Alle vorkommenden Potenzreihen haben unendlichen Konvergenzradius. Die Funktion  $x \mapsto \frac{\sin(x)}{x}$  lässt sich stetig auf  $\mathbb{R}$  fortsetzen, wobei die Fortsetzung in 0 keine Nullstelle hat. Folglich ist das Integral bei 0 nicht uneigentlich.

(ii) Für jedes  $b > 0$  gilt

$$\begin{aligned} \int_0^b \underbrace{e^{-x}}_{f'(x)} \underbrace{\ln(1+x)}_{g(x)} dx &\stackrel{\text{Part. Int.}}{=} - [e^{-x} \ln(1+x)]_{x=0}^b + \int_0^b e^{-x} \frac{1}{1+x} dx \\ &= - \frac{\log(1+b)}{e^b} + \int_0^b e^{-x} \frac{1}{1+x} dx. \end{aligned}$$

Wegen

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \frac{\log(1+b)}{\underbrace{e^b}_{\rightarrow \infty}} \stackrel{\text{Hospital}}{=} \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{1}{(1+b) \underbrace{e^b}_{\neq 0}} = 0$$

ist das uneigentliche Integral  $\int_0^\infty e^{-x} \log(1+x) dx$  genau dann konvergent, wenn das uneigentliche Integral  $\int_0^\infty e^{-x} \frac{1}{1+x} dx$  konvergent ist. Dieses ist tatsächlich der Fall nach dem Majorantenkriterium aus Abschnitt 14.4 des Skriptes. Für alle  $0 \leq x < \infty$  gilt

$$e^{-x} \frac{1}{1+x} \leq e^{-x}, \text{ und } \int_0^\infty e^{-x} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{-x} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} - [e^{-x}]_{x=0}^b = 1 - \lim_{b \rightarrow \infty} e^{-b} = 1.$$

(iii) Wir untersuchen den Integranden „in der Nähe der unteren Grenze“. Es gilt

$$\log(x) \leq \log\left(\frac{1}{e}\right) = -1$$

für alle  $0 < x \leq \frac{1}{e}$ . Ferner folgt aus der Potenzreihendarstellung des  $\sinh$

$$\begin{aligned} 0 < \sinh(x) - x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} x^{2n+1} - x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} x^{2n+1} \\ &\stackrel{\text{Index-Shift}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+3)!} x^{2n+3} = x^3 \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+3)!} x^{2n}}_{=:h(x)>0} \end{aligned}$$

für alle  $x \in \mathbb{R}$ . Die durch den obigen Ausdruck definierte Funktion  $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$  ist als Potenzreihe stetig und nimmt auf  $[0, \frac{1}{e}]$  ihr Maximum  $M$  an. Folglich gilt

$$-\frac{x \ln(x)}{\sinh(x) - x} \geq \frac{x \ln(e)}{x^3 h(x)} \geq \frac{1}{x^2 M}$$

für alle  $0 < x \leq \frac{1}{e}$ . Wegen

$$\int_a^{\frac{1}{e}} \frac{1}{x^2 M} dx = -\frac{1}{M} \left[ \frac{1}{x} \right]_{x=a}^{\frac{1}{e}} = \frac{1}{M} \left( \frac{1}{a} - e \right) \xrightarrow{a \rightarrow 0^+} \infty$$

ist das uneigentliche Integral  $\int_0^{\frac{1}{e}} \frac{1}{x^2 M} dx$  divergent. Nach dem Minorantenkriterium aus Abschnitt 14.4 des Skriptes ist dann auch das uneigentliche Integral

$$-\int_0^{\frac{1}{e}} \frac{x \ln(x)}{\sinh(x) - x} dx$$

divergent. Nach Definition aus Abschnitt 14.1 des Skriptes ist das uneigentliche Integral

$$\int_0^{\infty} \frac{x \ln(x)}{\sinh(x) - x} dx$$

ebenfalls divergent.

□