Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Analysis
apl. Prof. Dr. Peer Christian Kunstmann
Marvin Schulz, M.Sc.

WS2022/23
20.02.2023

Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Physik

Lösungsvorschlag zum 14. Übungsblatt

Aufgabe 81:
Forme A durch Zeilenumformungen wie folgt um

$$\begin{aligned}
A &= \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 & 4 \\ 4 & -6 & 4 & -5 \\ -2 & 0 & 1 & 7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 & 4 \\ 0 & -6 & 6 & 9 \\ -2 & 0 & 1 & 7 \end{pmatrix} \\
&\sim \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \\ -2 & 0 & 1 & 7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 & 7 \\ 0 & -2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \mid \cdot -\frac{1}{2} \\ \mid \cdot -\frac{1}{2} \\ \mid \cdot -\frac{1}{3} \end{matrix} \\
&\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{7}{2} \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Die letzte Matrix ist in Zeilennormalform. Da sie keine Nullzeilen enthält, sind die Zeilen von A linear unabhängig (siehe Folgerung aus dem Satz aus Abschnitt 15.7 des Skriptes). $\square$

Aufgabe 82:
Forme A durch Zeilenumformungen wie folgt um

$$\begin{aligned}
A &= \begin{pmatrix} 1 & -4 & 3 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 4 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 4 & 4 \\ 1 & 0 & -1 & \alpha & \beta \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -4 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 6 & 2 \\ 0 & 8 & -4 & 8 & 4 \\ 1 & 0 & -1 & \alpha & \beta \end{pmatrix} \\
&\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 10 & 4 \\ 0 & 2 & -2 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & -16 & -4 \\ 1 & 0 & -1 & \alpha & \beta \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 6 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -16 & -4 \\ 1 & 0 & -1 & \alpha & \beta \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \mid \cdot \frac{1}{2} \\ \mid \cdot \frac{1}{4} \\ \\ \end{matrix} \\
&\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & \alpha & \beta \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha - 10 & \beta - 4 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Die letzte Matrix ist für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ in Zeilenstufenform. Sie enthält genau für $\alpha \neq 10$ oder $\beta \neq 4$ keine Nullzeilen und genau in diesem Fall sind Zeilen von A linear unabhängig (siehe Folgerung aus dem Satz aus Abschnitt 15.7 des Skriptes).

Sind $\alpha = 10$ und $\beta = 4$, so ist die letzte Matrix bereits die Zeilennormalform von A.

Ist $\alpha = 10$ und $\beta \neq 4$, so ist

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \beta - 4 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \mid \cdot \frac{1}{\beta-4} \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

die Zeilennormalform von A.

Für $\alpha \neq 10$ definiere $\kappa := \frac{\beta-4}{\alpha-10}$. Dann ist

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha-10 & \beta-4 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \mid \cdot \frac{1}{\alpha-10} \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \kappa \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow + \\ \leftarrow + \\ \leftarrow + \\ \cdot 4 \quad \cdot 1 \quad \cdot(-6) \end{matrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 3-6\kappa \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \kappa \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1+4\kappa \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \kappa \end{pmatrix}$$

die Zeilennormalform von A. $\square$

Aufgabe 83:

Bringe zunächst die erweiterte Matrix $(A|\vec{b})$ durch Zeilenumformungen auf Zeilennormalform

$$\begin{pmatrix} 1 & \alpha & 3 \\ \beta & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{matrix} \cdot(-\beta) \\ \leftarrow + \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 3 \\ 0 & 2-\alpha\beta & 4-3\beta \end{pmatrix}.$$

- $\alpha\beta \neq 2$: In diesem Fall ist (siehe Abschnitt 15.12 des Skriptes) $\dim \operatorname{Bild}(A) = \operatorname{Rang}(A) = 2$. Also ist $\operatorname{Bild}(A) = \mathbb{R}^2$. Nach der Dimensionsformel (siehe Abschnitt 15.13 des Skriptes ist $2 = \operatorname{Rang}(A) + \dim \operatorname{Kern}(A)$. Also ist $\dim \operatorname{Kern}(A) = 0$ und $\operatorname{Kern}(A) = \left\{\vec{0}\right\}$.

  Nach Abschnitt 15.11 des Skriptes ist das lineare Gleichungssystem eindeutig lösbar. Die Lösung $\vec{x}$ erhält man in diesem Fall durch

$$(A|\vec{b}) \sim \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 3 \\ 0 & 2-\alpha\beta & 4-3\beta \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \mid \cdot \frac{1}{2-\alpha\beta} \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 3 \\ 0 & 1 & \frac{4-3\beta}{2-\alpha\beta} \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow + \\ \cdot(-\alpha) \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{6-4\alpha}{2-\alpha\beta} \\ 0 & 1 & \frac{4-3\beta}{2-\alpha\beta} \end{pmatrix},$$

  also $\vec{x} = \frac{1}{2-\alpha\beta} \begin{pmatrix} 6-4\alpha \\ 4-3\beta \end{pmatrix}$.

- $\alpha\beta = 2$: In diesem Fall ist $\dim \operatorname{Bild}(A) = \operatorname{Rang}(A) = 1$ (siehe Abschnitt 15.12 des Skriptes). Da $\operatorname{Bild}(A)$ der lineare Spann der Spalten von A ist (siehe (2) im Abschnitt 15.10 des Skriptes), muss

$$\operatorname{Bild}(A) = \operatorname{lin}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ \beta \end{pmatrix}\right\} = \operatorname{lin}\left\{\begin{pmatrix} \alpha \\ 2 \end{pmatrix}\right\}$$

  gelten. Den Kern von A kann man mit dem (-1)-Ergänzungstrick (siehe Abschnitt 15.11 des Skriptes) aus der Zeilennormalform von A ablesen und erhält

$$\operatorname{Kern}(A) = \operatorname{lin}\left\{\begin{pmatrix} \alpha \\ -1 \end{pmatrix}\right\}.$$

  Das lineare Gleichungssystem ist genau dann lösbar, wenn

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \in \operatorname{Bild}(A) = \operatorname{lin}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ \beta \end{pmatrix}\right\} = \operatorname{lin}\left\{\begin{pmatrix} \alpha \\ 2 \end{pmatrix}\right\}.$$

Dies ist genau für $\alpha = \frac{3}{2}$ bzw. $\beta = \frac{4}{3}$ der Fall. Dann kann eine partikuläre Lösung $\vec{x}_0$ aus der obigen Zeilennormalform der erweiterten Matrix abgelesen werden. Es ist $\vec{x}_0 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$. Die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems ist nach Abschnitt 15.11 des Skriptes durch

$$\vec{x}_0 + \mathrm{Kern}(A) = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ -1 \end{pmatrix} \,\middle|\, \lambda \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} \,\middle|\, \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

gegeben.

□ Aufgabe 84:

Bringe zunächst die erweiterte Matrix $(A|\vec{b})$ durch Zeilenumformungen auf Zeilennormalform

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 & \alpha \\ 1 & 1 & \alpha & 2 \\ 2 & 3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & \alpha & 2 \\ 0 & 1 & 2-3\alpha & \alpha-6 \\ 0 & 1 & -1-2\alpha & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & \alpha & 2 \\ 0 & 1 & -1-2\alpha & -3 \\ 0 & 0 & 3-\alpha & \alpha-3 \end{pmatrix}.$$

- $\alpha \neq 3$: In diesem Fall ist (siehe Abschnitt 15.12 des Skriptes) $\dim \mathrm{Bild}(A) = \mathrm{Rang}(A) = 3$. Also ist $\mathrm{Bild}(A) = \mathbb{R}^3$. Nach der Dimensionsformel (siehe Abschnitt 15.13 des Skriptes ist $3 = \mathrm{Rang}(A) + \dim \mathrm{Kern}(A)$. Also ist $\dim \mathrm{Kern}(A) = 0$ und $\mathrm{Kern}(A) = \{\vec{0}\}$.

  Nach Abschnitt 15.11 des Skriptes ist das lineare Gleichungssystem eindeutig lösbar. Die Lösung $\vec{x}$ erhält man in diesem Fall durch

$$(A|\vec{b}) \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & \alpha & 2 \\ 0 & 1 & -1-2\alpha & -3 \\ 0 & 0 & 3-\alpha & \alpha-3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2+\alpha \\ 0 & 1 & 0 & -4-2\alpha \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 6+3\alpha \\ 0 & 1 & 0 & -4-2\alpha \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix},$$

  also $\vec{x} = \begin{pmatrix} 6+3\alpha \\ -4-2\alpha \\ -1 \end{pmatrix}$.

- $\alpha = 3$: In diesem Fall ist $\dim \mathrm{Bild}(A) = \mathrm{Rang}(A) = 2$ (siehe Abschnitt 15.12 des Skriptes). Da $\mathrm{Bild}(A)$ der lineare Spann der Spalten von A ist (siehe (2) im Abschnitt 15.10 des Skriptes), muss

$$\mathrm{Bild}(A) = \mathrm{lin}\left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\} = \mathrm{lin}\left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} = \mathrm{lin}\left\{ \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

  gelten.

  Berechne weiter die Zeilennormalform der erweiterten Matrix

$$(A|\vec{b}) \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -7 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 10 & 5 \\ 0 & 1 & -7 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Den Kern von A kann man mit dem (-1)-Ergänzungstrick (siehe Abschnitt 15.11 des Skriptes) aus der Zeilennormalform von A ablesen und erhält

$$\mathrm{Kern}(A) = \mathrm{lin}\left\{\begin{pmatrix} 10 \\ -7 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}.$$

Eine partikuläre Lösung $\vec{x}_0$ des linearen Gleichungssystems kann aus der obigen Zeilennormalform der erweiterten Matrix abgelesen werden. Es ist $\vec{x}_0 = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$. Die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems ist nach Abschnitt 15.11 des Skriptes durch

$$\vec{x}_0 + \mathrm{Kern}(A) = \left\{\begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 10 \\ -7 \\ -1 \end{pmatrix} \,\middle|\, \lambda \in \mathbb{R}\right\}$$

gegeben.

□

Aufgabe 85:

Die Lösung findet sich als Aufgabe 4 in der herbst-klausur 2012.
`https://www.math.kit.edu/iana1/seite/hm/de`

Aufgabe 86:

Die Lösung findet sich als Aufgabe 4 b) in der frühjar-klausur 2012
`https://www.math.kit.edu/iana1/seite/hm/de`