

1. Übungsblatt

Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Physik

Wintersemester 2023/24

26. Oktober 2023

Behandelt am 2. November 2023

Aufgabe 1 (Übung):

Seien A , B und C logische Aussagen. Vereinfachen Sie die folgenden Aussagen, d.h. bestimmen Sie jeweils eine äquivalente Aussage in möglichst kurzer Darstellung.

(a) $A \wedge [(C \wedge \neg B) \vee (B \vee \neg A)]$

(b) $A \wedge [\neg A \vee (B \wedge C) \vee ((\neg C \vee \neg B) \wedge B)]$

Aufgabe 2 (Tutorium):

(a) Negieren Sie folgende Aussagen, und entscheiden Sie jeweils, ob die Aussage richtig oder falsch ist.

(i) $\forall x \in \mathbb{R} \exists y \in \mathbb{R} \forall z \geq y: x \leq z^2$,

(ii) $\exists y \in \mathbb{R} \forall z \geq y \forall x \in \mathbb{R}: x \leq z^2$.

(b) Vereinfachen Sie durch logische Umformungen die Aussage $\neg A \vee (B \wedge A)$.

Aufgabe 3 (Übung):

Es seien A, M_1, M_2 Mengen. Zeigen Sie:

(a) $A \times (M_1 \cup M_2) = (A \times M_1) \cup (A \times M_2)$

(b) $\text{Pot}(M_1) \cup \text{Pot}(M_2) \subseteq \text{Pot}(M_1 \cup M_2)$

(c) Gilt in (b) auch die umgekehrte Inklusion? Beweise Sie oder geben Sie ein Gegenbeispiel an.

Aufgabe 4 (Tutorium):

Negieren Sie folgende Aussagen, und entscheiden Sie jeweils, ob die Aussage richtig oder falsch ist.

(a) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gibt es ein $m \in \mathbb{N}$ mit $m \geq n$.

(b) $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \exists z \in \mathbb{R}: x \cdot z = y$.

(c) Unter allen Rechtecken mit dem gleichen Umfang hat das Quadrat den größten Flächeninhalt.

(d) Für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $x > 0$, die genügend groß sind, gilt $nx \leq x^n$.

Aufgabe 5 (Übung):

Untersuchen Sie, welche der folgenden Relationen R in der jeweiligen Menge X Äquivalenzrelationen oder Ordnungsrelationen sind. Falls R eine Äquivalenzrelation ist, geben Sie die Äquivalenzklasse $[0]_R$ (in (i),(ii)) beziehungsweise $[(-3, 5)]_R$ (in (iii),(iv)) an.

(a) $X = \mathbb{N}$, $mRn \iff m$ ist durch n teilbar.

(b) $X = \mathbb{R}$, $xRy \iff \exists k \in \mathbb{Z}: x = y + 2\pi k$.

(c) $X = \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$, $(z_1, n_1)R(z_2, n_2) \iff z_1 n_2 = z_2 n_1$.

(d) $(x_1, x_2)R(y_1, y_2) \iff x_1 \leq y_1 \wedge x_2 \leq y_2$

Aufgabe 6 (Tutorium):

Sind die folgenden Aussagen stets wahr oder (zumindest manchmal) falsch? Dabei sind A , B und C Mengen.

(a) $\overset{W}{\square} \overset{F}{\square} C \setminus (A \cap B) = (C \setminus A) \cap (C \setminus B).$

(e) $\overset{W}{\square} \overset{F}{\square} (C \setminus A) \times (C \setminus B) = (C \times C) \setminus (A \times B).$

(b) $\overset{W}{\square} \overset{F}{\square} A \subsetneq \text{Pot}(A).$

(f) $\overset{W}{\square} \overset{F}{\square} \emptyset \times A = \emptyset.$

(c) $\overset{W}{\square} \overset{F}{\square} A \in \text{Pot}(A).$

(g) $\overset{W}{\square} \overset{F}{\square} \{1, 2, 3\} = \{1, 2, 2, 3, 3, 3\}.$

(d) $\overset{W}{\square} \overset{F}{\square} \text{Pot}(A \times B) = \text{Pot}(A) \times \text{Pot}(B).$

(h) $\overset{W}{\square} \overset{F}{\square} \{1, 2, 3\} = \{\text{Eins}, \text{Zwei}, \text{Drei}\}.$