Institut für Analysis
Priv.-Doz. Dr. Gerd Herzog
M.Sc. Niklas Knobel
M.Sc. Sebastian Ohrem

Lösungsvorschlag zum 1. Übungsblatt

Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Physik

Wintersemester 2023/24

2. November 2023

Aufgabe 1 (Übung):
Seien A, B und C logische Aussagen. Vereinfachen Sie die folgenden Aussagen, d.h. bestimmen Sie jeweils eine äquivalente Aussage in möglichst kurzer Darstellung.

(a) $A \wedge [(C \wedge \neg B) \vee (B \vee \neg A)]$

(b) $A \wedge [\neg A \vee (B \wedge C) \vee \big((\neg C \vee \neg B) \wedge B\big)]$

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 1:
Im folgenden verwenden wir die Assoziativgesetze

$$(A \vee B) \vee C \iff A \vee (B \vee C) \quad \text{und} \quad (A \wedge B) \wedge C \iff A \wedge (B \wedge C). \tag{1}$$

und die Distributivgesetze

$$(A \vee B) \wedge C \iff (A \wedge C) \vee (B \wedge C) \quad \text{und} \quad (A \wedge B) \vee C \iff (A \vee C) \wedge (B \vee C). \tag{2}$$

Außerdem verwenden wir dass die Aussage $A \vee \neg A$ immer wahr und die Aussage $A \wedge \neg A$ immer falsch ist. Für jede Aussage B folgt daraus

$$B \wedge (A \vee \neg A) \iff B \quad \text{und} \quad B \vee (A \wedge \neg A) \iff B. \tag{3}$$

(a) Mit den obigen Regeln vereinfachen wir

$$\begin{aligned}
A \wedge [(C \wedge \neg B) \vee (B \vee \neg A)] &\overset{(1)}{\iff} A \wedge [((C \wedge \neg B) \vee B) \vee \neg A] \\
&\overset{(2)}{\iff} A \wedge [(C \wedge \neg B) \vee B] \vee (A \wedge \neg A) \\
&\overset{(3)}{\iff} A \wedge [(C \wedge \neg B) \vee B] \\
&\overset{(2)}{\iff} A \wedge [(C \vee B) \wedge (\neg B \vee B)] \\
&\overset{(3)}{\iff} A \wedge (C \vee B)
\end{aligned}$$

(b) Mit den obigen Regeln vereinfachen wir

$$\begin{aligned}
&A \wedge [\neg A \vee (B \wedge C) \vee \big((\neg C \vee \neg B) \wedge B\big)] \\
&\overset{(2)}{\iff} (A \wedge \neg A) \vee \big(A \wedge [(B \wedge C) \vee \big((\neg C \vee \neg B) \wedge B\big)]\big) \\
&\overset{(3)}{\iff} A \wedge [(B \wedge C) \vee \big((\neg C \vee \neg B) \wedge B\big)] \\
&\overset{(2)}{\iff} A \wedge [(B \wedge C) \vee (\neg C \wedge B) \vee (\neg B \wedge B)] \\
&\overset{(3)}{\iff} A \wedge [(B \wedge C) \vee (\neg C \wedge B)] \\
&\iff A \wedge B.
\end{aligned}$$

Aufgabe 2 (Tutorium):

(a) Negieren Sie folgende Aussagen, und entscheiden Sie jeweils, ob die Aussage richtig oder falsch ist.

(i) $\forall x \in \mathbb{R}\ \exists y \in \mathbb{R}\ \forall z \geq y\colon x \leq z^2$,

(ii) $\exists y \in \mathbb{R}\ \forall z \geq y\ \forall x \in \mathbb{R}\colon x \leq z^2$.

(b) Vereinfachen Sie durch logische Umformungen die Aussage $\neg A \vee (B \wedge A)$.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 2:

(a) (i) Die Negation der Aussage lautet

$$\exists x \in \mathbb{R}\ \forall y \in \mathbb{R}\ \exists z \geq y\colon x > z^2.$$

Die ursprüngliche Aussage

$$\forall x \in \mathbb{R}\ \exists y \in \mathbb{R}\ \forall z \geq y\colon x \leq z^2$$

ist hier wahr. Dazu sei $x \in \mathbb{R}$ beliebig. Dann wählen wir

$$y = \begin{cases} \sqrt{x}, & \text{falls } x \geq 0, \\ 0, & \text{falls } x < 0. \end{cases}$$

weiter sei $z \geq y$ beliebig. Dann ist $x \leq z^2$: Für $x < 0$ ist dies klar, denn $z^2 \geq 0 \geq x$. Für $x \geq 0$ gilt dies wegen

$$z^2 = (z+y)(z-y) + y^2 \geq y^2 = x,$$

wobei wir $z + y \geq 0$ und $z - y \geq 0$ verwendet haben.

(ii) Die Negation der Aussage lautet

$$\forall y \in \mathbb{R}\ \exists z \geq y\ \exists x \in \mathbb{R}\colon x > z^2$$

Nun ist die Negation wahr. Dazu sei $y \in \mathbb{R}$ beliebig. Dann wählen wir $z = y$ (sodass $z \geq y$ gilt) und $x = y^2 + 1 = z^2 + 1$ und sehen, dass für diese Wahl $x > z^2$ erfüllt ist.

(b) Es gilt

$$\begin{aligned} \neg A \vee (B \wedge A) &\Leftrightarrow (\neg A \vee B) \wedge (\neg A \vee A) \\ &\Leftrightarrow (\neg A \vee B) \wedge \text{wahr} \\ &\Leftrightarrow (\neg A \vee B) \\ &\Leftrightarrow (A \Rightarrow B). \end{aligned}$$

Aufgabe 3 (Übung):
Es seien A, M_1, M_2 Mengen. Zeigen Sie:

(a) $A \times (M_1 \cup M_2) = (A \times M_1) \cup (A \times M_2)$

(b) $\mathrm{Pot}(M_1) \cup \mathrm{Pot}(M_2) \subseteq \mathrm{Pot}(M_1 \cup M_2)$

(c) Gilt in (b) auch die umgekehrte Inklusion? Beweise Sie oder geben Sie ein Gegenbeispiel an.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 3:

(a) *Beweis:* "$\subseteq$": Sei $x \in A \times (M_1 \cup M_2)$. Dann gilt $x = (a, m)$ mit $a \in A$ und $m \in M_1 \cup M_2$. Falls $m \in M_1$, ist $x \in A \times M_1$ und damit $x \in (A \times M_1) \cup (A \times M_2)$. Anderenfalls ist $m \in M_2$, also $x \in A \times M_2$ und damit auch $x \in (A \times M_1) \cup (A \times M_2)$. In jedem Fall gilt $x \in (A \times M_1) \cup (A \times M_2)$.

"$\supseteq$": Sei $x \in (A \times M_1) \cup (A \times M_2)$. Falls $x \in A \times M_1$, ist $x = (a, m)$ mit $a \in A$ und $m \in M_1$, und damit auch $x = (a, m) \in A \times (M_1 \cup M_2)$. Anderenfalls ist $x \in A \times M_2$ und mit ähnlichem Argument auch $x \in A \times (M_1 \cup M_2)$.

Insgesamt haben wir $A \times (M_1 \cup M_1) \subseteq (A \times M_1) \cup (A \times M_2)$ und $A \times (M_1 \cup M_1) \supseteq (A \times M_1) \cup (A \times M_2)$ gezeigt, und damit Gleichheit beider Mengen. $\square$

(b) *Beweis:* Sei $x \in \mathrm{Pot}(M_1) \cup \mathrm{Pot}(M_2)$. Falls $x \in \mathrm{Pot}(M_1)$ gilt, ist $x \subseteq M_1$. Wegen $M_1 \subseteq M_1 \cup M_2$ und Transitivität von $\subseteq$ ist dann auch $x \subseteq M_1 \cup M_2$, also $x \in \mathrm{Pot}(M_1 \cup M_2)$. Anderenfalls ist $x \in \mathrm{Pot}(M_2)$ und aus ähnlichem Grund wieder $x \in \mathrm{Pot}(M_1 \cup M_2)$. $\square$

(c) Die umgekehrte Inklusion in (b) gilt nicht immer. Dazu betrachten wir das Gegenbeispiel $M_1 = \{3\}, M_2 = \{4\}$. Dann gelten

$$\mathrm{Pot}(M_1) \cup \mathrm{Pot}(M_2) = \mathrm{Pot}(\{3\}) \cup \mathrm{Pot}(\{4\}) = \{\emptyset, \{3\}\} \cup \{\emptyset, \{4\}\} = \{\emptyset, \{3\}, \{4\}\}$$

und

$$\mathrm{Pot}(M_1 \cup M_2) = \mathrm{Pot}(\{3, 4\}) = \{\emptyset, \{3\}, \{4\}, \{3, 4\}\},$$

was keine Teilmenge der oberen Menge ist.

Aufgabe 4 (Tutorium):
Negieren Sie folgende Aussagen, und entscheiden Sie jeweils, ob die Aussage richtig oder falsch ist.

(a) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gibt es ein $m \in \mathbb{N}$ mit $m \geq n$.

(b) $\forall\, (x, y) \in \mathbb{R}^2\ \exists\, z \in \mathbb{R} \colon x \cdot z = y$.

(c) Unter allen Rechtecken mit dem gleichen Umfang hat das Quadrat den größten Flächeninhalt.

(d) Für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $x > 0$, die genügend groß sind, gilt $nx \leq x^n$.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 4:

(a) Mit Quantoren kann man die Aussage in der Form

$$\forall\, n \in \mathbb{N}\ \exists\, m \in \mathbb{N} \colon m \geq n$$

schreiben. Die Negation lautet:

$$\exists\, n \in \mathbb{N}\ \forall\, m \in \mathbb{N} \colon m < n.$$

In Worten könnte man diese Aussage wie folgt ausdrücken: Es gibt $n \in \mathbb{N}$ so, dass jedes $m \in \mathbb{N}$ die Ungleichung $m < n$ erfüllt. Offensichtlich ist die ursprüngliche Aussage wahr, denn man kann zu jedem $n \in \mathbb{N}$ die Zahl $m = n$ wählen um die Ungleichung $m \geq n$ zu erfüllen.

(b) Die Negation der Aussage lautet

$$\exists\, (x, y) \in \mathbb{R}^2\ \forall\, z \in \mathbb{R} \colon x \cdot z \neq y.$$

In Worten: Es gibt $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ so, dass $x \cdot z \neq y$ für jedes $z \in \mathbb{R}$ gilt. In diesem Fall ist die Negation wahr, denn für $(x, y) = (0, 1)$ gilt $x \cdot y = 0 \neq 1 = y$ für alle $z \in \mathbb{R}$.

(c) Die Negation der Aussage lautet: Es gibt ein Rechteck, das einen größeren Flächeninhalt besitzt als ein Quadrat mit dem gleichen Umfang. Um die Aussage formaler aufzuschreiben und schließlich zu entscheiden, ob sie wahr ist oder nicht, fixieren wir eine Zahl $c \in \mathbb{R}$ mit $c > 0$. Wir betrachten Rechtecke mit den Seitenlängen $a, b \in \mathbb{R}$ die alle den gleichen Umfang $2(a + b) = c$ besitzen. Der Flächeninhalt eines solchen Rechtecks lautet ab. Das Quadrat mit Umfang c hat die Seitenlänge $\frac{c}{4}$ und den Flächeninhalt $\frac{c^2}{16} = \frac{(a+b)^2}{4}$. Die ursprüngliche Aussage lautet also:

$$\forall\, (a, b) \in [0, \infty)^2 \colon ab \leq \frac{(a + b)^2}{4}.$$

Die Negation lautet:

$$\exists\, (a, b) \in [0, \infty)^2 \colon ab > \frac{(a + b)^2}{4}.$$

Wir stellen fest, dass für alle $a, b \in [0, \infty)^2$ die Ungleichung $(a - b)^2 \geq 0$ gilt. Umformen dieser Ungleichung liefert $ab \leq \frac{(a+b)^2}{4}$ und somit ist die Aussage über das Quadrat wahr.

(d) Wir müssen zunächst die Ausdrucksweise „genügend groß“ formalisieren. Die ursprüngliche Aussage lautet dann:

$$\forall n \in \mathbb{N}\, \exists C \in (0,\infty)\, \forall x \in (C,\infty)\colon nx \leq x^n.$$

Die Negation dieser Aussage ergibt sich dann zu

$$\exists n \in \mathbb{N}\, \forall C \in (0,\infty)\, \exists x \in (C,\infty)\colon nx > x^n.$$

Wir wollen zeigen, dass die ursprüngliche Aussage wahr ist. Dazu müssen wir zu beliebig vorgegebenem $n \in \mathbb{N}$ ein passendes $C > 0$ angeben, welches die Aussage erfüllt. Sei also $n \in \mathbb{N}$. Wir wählen $C = n$. Im Fall $n = 1$ gilt die Ungleichung $nx = x \leq x = x^n$ für alle $x \geq 1$, die Aussage ist also in diesem Fall erfüllt. Im Fall $n \geq 2$ erhalten wir für alle $x \geq n = C$ die Ungleichung

$$nx \leq x^2 \leq x^n,$$

wobei wir für die erste Ungleichung die Eigenschaft $x \geq n$ und für die zweite Ungleichung die Eigenschaften $n \geq 2$ und $x \geq 1$ verwendet haben. Die Aussage ist also auch in diesem Fall erfüllt. Insgesamt haben wir also gezeigt, dass die Aussage wahr ist.

Aufgabe 5 (Übung):

Untersuchen Sie, welche der folgenden Relationen R in der jeweiligen Menge X Äquivalenzrelationen oder Ordnungsrelationen sind. Falls R eine Äquivalenzrelation ist, geben Sie die Äquivalenzklasse $[0]_R$ (in (i),(ii)) beziehungsweise $[(-3,5)]_R$ (in (iii),(iv)) an.

(a) $X = \mathbb{N}$, $mRn \iff m$ ist durch n teilbar.

(b) $X = \mathbb{R}$, $xRy \iff \exists k \in \mathbb{Z}\colon x = y + 2\pi k$.

(c) $X = \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$, $(z_1,n_1)R(z_2,n_2) \iff z_1n_2 = z_2n_1$.

(d) $(x_1,x_2)R(y_1,y_2) \iff x_1 \leq y_1 \wedge x_2 \leq y_2$

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 5:

(a) Die angegebene Relation ist eine Ordnungsrelation, und keine Äquivalenzrelation. Wir erinnern, dass eine Zahl $m \in \mathbb{N}$ durch eine Zahl $n \in \mathbb{N}$ genau dann *teilbar* ist, wenn ein $k \in \mathbb{N}$ existiert mit $m = kn$.

- *Reflexivität*: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $n = 1 \cdot n$, also ist $n \sim n$.
- *Transitivität*: Es seien $l,m,n \in \mathbb{N}$ mit lRm und mRn. Dann existieren $k,K \in \mathbb{N}$ mit $l = km$ und $m = Kn$. Somit ist $l = (kK)n$, also lRn.
- *Symmetrie*: Zum Beispiel ist $6R2$, da $6 = 2 \cdot 3$ ist, aber es gilt nicht $2R6$, da kein $k \in \mathbb{N}$ existiert mit $2 = 6 \cdot k$. Diese Gegenbeispiel zeigt, dass R nicht symmetrisch ist.
- *Antisymmetrie*: Es gelten mRn und nRm. Dann existieren $k,K \in \mathbb{N}$ mit $m = kn$ und $n = Km$. Also ist $n = (Kk)n$ und damit $Kk = 1$. Da k,K natürliche Zahlen sind, muss $k = K = 1$ gelten, und deshalb ist $n = m$.

(b) Die angegebene Relation ist eine Äquivalenzrelation, und keine Ordnungsrelation.

- *Reflexivität*: Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $x = x + 2\pi \cdot 0$ und somit xRx.
- *Transitivität*: Es seien $x,y,z \in \mathbb{R}$ mit xRy und yRz. Dann existieren $k,l \in \mathbb{Z}$ mit $x = y + 2\pi k$ und $y = z + 2\pi l$. Somit ist $x = y + 2\pi(k+l)$, also xRz.
- *Symmetrie*: Es seien $x,y \in \mathbb{R}$ mit xRy. Dann existiert ein $k \in \mathbb{Z}$ mit $x = y + 2\pi k$. Folglich ist $y = x + 2\pi(-k)$ und yRx.
- *Antisymmetrie*: Es gelten $0R2\pi$ und $2\pi R0$ aber $0 \neq 2\pi$. Dieses Gegenbeispiel zeigt, dass R nicht Antisymmetrisch ist.

Es gilt $[0]_R = \{x \in \mathbb{R}\colon xR0\} = \{2\pi k\colon k \in \mathbb{Z}\}$.

(c) Die angegebene Relation ist eine Äquivalenzrelation, und keine Ordnungsrelation.

- *Reflexivität*: Für alle $(z_1,n_1) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ gilt $z_1n_1 = z_1n_1$ und somit $(z_1,n_1)R(z_1,n_1)$.
- *Transitivität*: Es seien $(z_1,n_1),(z_2,n_2),(z_3,n_3) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{N}$ mit $(z_1,n_1)R(z_2,n_2)$ und $(z_2,n_2)R(z_3,n_3)$. Dann gilt $z_1n_2 = z_2n_1$ und $z_2n_3 = z_3n_2$ und damit $\frac{z_1}{n_1} = \frac{z_2}{n_2} = \frac{z_3}{n_3}$. Somit ist $(z_1,n_1)R(z_3,n_3)$.

- *Symmetrie*: Für alle $(z_1, n_1), (z_2, n_2) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ mit $(z_1, n_1)R(z_2, n_2)$ gilt $z_1 n_2 = z_2 n_1$. Hieraus folgt $z_2 n_1 = z_1 n_2$ und somit $(z_2, n_2)R(z_1, n_1)$.
- *Antisymmetrie*: R ist nicht Antisymmetrisch, denn es gelten $(0,1)R(0,2)$ und $(0,2)R(0,1)$.

Es gilt
$$[(-3,5)]_R = \{(z,n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \colon (z,n)R(-3,5)\} = \left\{(z,n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \colon \frac{z}{n} = \frac{3}{5}\right\}.$$

(d) Die angegebene Relation ist eine Ordnungsrelation, und keine Äquivalenzrelationen.
- *Reflexivität*: Für alle $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ gilt $x_1 \leq x_1$ und $x_2 \leq x_2$ und somit $(x_1, x_2)R(x_1, x_2)$.
- *Transitivität*: Es seien $(x_1, x_2), (y_1, y_2), (z_1, z_2) \in \mathbb{R}^2$ mit $(x_1, x_2)R(y_1, y_2)$ und $(y_1, y_2)R(z_1, z_2)$. Dann gilt $x_1 \leq y_1 \leq z_1$, $x_2 \leq y_2 \leq z_2$ und damit $x_1 \leq z_1$ sowie $x_2 \leq z_2$. Also $(x_1, x_2)R(z_1, z_2)$.
- *Symmetrie*: Es gelten $(0,0)R(1,1)$ aber nicht $(1,1)R(0,0)$. Also ist R nicht symmetrisch.
- *Antisymmetrie*: Es seien $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ mit $(x_1, x_2)R(y_1, y_2)$ und $(y_1, y_2)R(x_1, x_2)$. Dann gilt $x_1 \leq y_1$ und $y_1 \leq x_1$ sowie $x_2 \leq y_2$ und $y_2 \leq x_2$. Damit folgt $x_1 = y_1$ und $x_2 = y_2$, also $(x_1, x_2) = (y_1, y_2)$.

Aufgabe 6 (Tutorium):
Sind die folgenden Aussagen stets wahr oder (zumindest manchmal) falsch? Dabei sind A, B und C Mengen.

(a) W ☐ F ☐ $C \setminus (A \cap B) = (C \setminus A) \cap (C \setminus B)$.

(b) W ☐ F ☐ $A \subsetneqq \operatorname{Pot}(A)$.

(c) W ☐ F ☐ $A \in \operatorname{Pot}(A)$.

(d) W ☐ F ☐ $\operatorname{Pot}(A \times B) = \operatorname{Pot}(A) \times \operatorname{Pot}(B)$.

(e) W ☐ F ☐ $(C \setminus A) \times (C \setminus B) = (C \times C) \setminus (A \times B)$.

(f) W ☐ F ☐ $\emptyset \times A = \emptyset$.

(g) W ☐ F ☐ $\{1,2,3\} = \{1,2,2,3,3,3\}$.

(h) W ☐ F ☐ $\{1,2,3\} = \{\text{Eins}, \text{Zwei}, \text{Drei}\}$.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 6:

W ☐ F ■ $C \setminus (A \cap B) = (C \setminus A) \cap (C \setminus B)$.

Um zu sehen, dass die Aussage falsch ist betrachten wir als Gegenbeispiel die Mengen $A = \{1\}$, $B = \{2\}$ und $C = \{1,2\}$. Dann gilt
$$C \setminus (A \cap B) = \{1,2\} \neq \emptyset = \{1\} \cap \{2\} = (C \setminus A) \cap (C \setminus B).$$

Um zu einer richtigen Aussage zu gelangen, können wir etwa die linke Seite der Gleichung wie folgt umformen. Es gilt
$$\begin{aligned} x \in C \setminus (A \cap B) &\iff x \in C \wedge x \notin (A \cap B) \\ &\iff x \in C \wedge [x \notin A \vee x \notin B] \\ &\iff [x \in C \wedge x \notin A] \vee [x \in C \wedge x \notin B] \\ &\iff x \in (C \setminus A) \cup (C \setminus B). \end{aligned}$$

Damit haben wir gezeigt, dass für beliebige Mengen A, B und C die Aussage
$$C \setminus (A \cap B) = (C \setminus A) \cup (C \setminus B)$$
richtig ist.

W ☐ F ■ $A \subsetneqq \operatorname{Pot}(A)$.

Im Fall der leeren Menge $\emptyset$ gilt tatsächlich $\emptyset \subsetneqq \{\emptyset\} = \operatorname{Pot}(\emptyset)$, da die leere Menge in jeder Menge enthalten ist. Wenn die Menge A nichtleer ist, dann ist die Aussage $A \subsetneqq \operatorname{Pot}(A)$ falsch.

W ■ F ☐ $A \in \operatorname{Pot}(A)$.

Nach Definition gilt $\operatorname{Pot}(A) = \{M \colon M \subseteq A\}$. Da die Menge A die Eigenschaft $A \subseteq A$ erfüllt, gilt $A \in \operatorname{Pot}(A)$.

W F
☐ ■ $\mathrm{Pot}(A \times B) = \mathrm{Pot}(A) \times \mathrm{Pot}(B)$.

Elemente der Menge $\mathrm{Pot}(A \times B)$ sind Teilmengen von $A \times B$. Andererseits sind Elemente der Menge $\mathrm{Pot}(A) \times \mathrm{Pot}(B)$ Tupel (a, b) mit $a \in \mathrm{Pot}(A), b \in \mathrm{Pot}(B)$, d.h. $a \subseteq A, b \subseteq B$. Elemente von $\mathrm{Pot}(A \times B)$ sind also Mengen von Tupeln, während Elemente von $\mathrm{Pot}(A) \times \mathrm{Pot}(B)$ Tupel von Mengen sind. Wir erwarten also, dass diese beiden Mengen nie gleich sind.

Das sieht man auch am Beispiel $A = B = \emptyset$. Dann gilt

$$\mathrm{Pot}(A \times B) = \mathrm{Pot}(\emptyset) = \{\emptyset\} \neq \{(\emptyset, \emptyset)\} = \{\emptyset\} \times \{\emptyset\} = \mathrm{Pot}(\emptyset) \times \mathrm{Pot}(\emptyset) = \mathrm{Pot}(A) \times \mathrm{Pot}(B).$$

Somit ist die angegebene Aussage falsch.

W F
☐ ■ $(C \setminus A) \times (C \setminus B) = (C \times C) \setminus (A \times B)$.

Setze $A = \{1\}$, $B = \{2\}$ und $C = \{1, 2\}$. Dann gilt

$$\begin{aligned}(C \setminus A) \times (C \setminus B) &= \{2\} \times \{1\} \\ &= \{(2, 1)\} \\ &\neq \{(1, 1), (2, 1), (2, 2)\} \\ &= \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2)\} \setminus \{(1, 2)\} \\ &= (C \times C) \setminus (A \times B).\end{aligned}$$

Also ist die angegebene Aussage falsch. Wir wollen die linke Seite der Gleichung so umformen, dass wir eine richtige Aussage erhalten. Es gilt

$$\begin{aligned}x \in (C \setminus A) \times (C \setminus B) &\iff x = (y, z) \colon y \in C \setminus A \wedge z \in C \setminus B \\ &\iff x = (y, z) \colon [y \in C \wedge y \notin A] \wedge [z \in C \wedge z \notin B] \\ &\iff x \in C \times C \wedge [x \notin A \times C \wedge x \notin C \times B] \\ &\iff x \in (C \times C) \setminus \big((A \times C) \cup (C \times B)\big).\end{aligned}$$

Damit haben wir gezeigt, dass für beliebige Mengen A, B und C die Gleichung

$$(C \setminus A) \times (C \setminus B) = (C \times C) \setminus \big((A \times C) \cup (C \times B)\big)$$

richtig ist.

W F
■ ☐ $\emptyset \times A = \emptyset$.

Nach Definition der Vorlesung gilt

$$\emptyset \times A = \{(x, y) \colon x \in \emptyset \wedge y \in A\}.$$

Da die Aussage $x \in \emptyset$ für jedes x falsch ist, gibt es kein (x, y) mit $(x, y) \in \emptyset \times A$. Daher folgt $\emptyset \times A = \emptyset$.

W F
■ ☐ $\{1, 2, 3\} = \{1, 2, 2, 3, 3, 3\}$.

Wiederholungen von Elementen spielen in der Mengenschreibweise keine Rolle. Das tritt auch natürlicherweise auf, zum Beispiel gilt

$$\big\{k^2 \colon k \in \mathbb{Z},\ -2 \leq k \leq 2\big\} = \{4, 1, 0, 1, 4\} = \{0, 1, 4\}.$$

W F
☐ ☐ $\{1, 2, 3\} = \{\mathrm{Eins}, \mathrm{Zwei}, \mathrm{Drei}\}$.

Um zu entscheiden, ob eine Aussage wahr oder falsch ist, müssen alle Bestandteile der Aussage präzise definiert sein. Die Frage ist hier, ob man das Wort „Eins“ als natürliche Zahl mit der Bedeutung des Symbols 1 auffassen möchte oder nicht. Wenn man das so macht, dann sind die Mengen sicherlich gleich. Genausogut kann man den Standpunkt vertreten, dass das Wort „Eins“ als Zusammensetzung von Buchstaben und nicht als natürliche Zahl zu verstehen ist. Dann sind die Mengen natürlich nicht gleich. Solche Fragen der Notation müssen geklärt werden, bevor man über den Wahrheitsgehalt von Aussagen entscheiden kann.