

2. Übungsblatt

Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Physik

Wintersemester 2023/24

2. November 2023

Behandelt am 9. November 2023

Aufgabe 1 (Übung):

Seien X, Y Mengen und $f : X \rightarrow Y$ eine Abbildung. Zeigen Sie für beliebige $M_1, M_2 \subseteq Y$ und $M_3, M_4 \subseteq X$

(i) $f^{-1}(M_1 \cap M_2) = f^{-1}(M_1) \cap f^{-1}(M_2),$

(ii) $f(M_3 \cap M_4) \subseteq f(M_3) \cap f(M_4),$

(iii) $f(M_3 \cup M_4) = f(M_3) \cup f(M_4).$

Zeigen Sie durch Gegenbeispiel, dass in (ii) keine Gleichheit gelten muss.

Aufgabe 2 (Tutorium):

Es seien X, Y, Z Mengen und $f : X \rightarrow Y$, sowie $g : Y \rightarrow Z$ Abbildungen. Zeigen Sie oder widerlegen Sie durch ein Gegenbeispiel die folgenden Aussagen:

(i) Ist f und g injektiv, so ist auch $g \circ f$ injektiv.

(ii) Ist $g \circ f$ injektiv, so ist auch g injektiv.

(iii) Ist f und g surjektiv, so ist auch $g \circ f$ surjektiv.

(iv) Ist $g \circ f$ surjektiv, so ist auch f surjektiv.

(v) Ist $g \circ f$ surjektiv, so ist auch g surjektiv.

(vi) Ist f und g bijektiv, so ist auch $g \circ f$ bijektiv.

(vii) Ist $g \circ f$ surjektiv und g injektiv, so ist f surjektiv.

(viii) Ist $g \circ f$ nicht injektiv, so gilt: f ist nicht injektiv und g ist nicht injektiv.

(ix) Ist $g \circ f$ nicht surjektiv, so gilt: f ist nicht surjektiv und g ist nicht surjektiv.

Aufgabe 3 (Übung):

Bestimmen Sie für die folgenden Mengen jeweils das Infimum, Minimum, Supremum und Maximum, sofern sie existieren.

(a) $A = \{x^2 - x + 2 : x \in \mathbb{R}\},$

(b) $B = \{n + \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}.$

Aufgabe 4 (Tutorium):

Bestimmen Sie für die folgenden Mengen jeweils das Infimum, Minimum, Supremum und Maximum, sofern sie existieren.

(a) $A = \{x + \frac{1}{x} : 0 < x \leq 42\},$

(b) $B = \left\{ \frac{x^2}{1+x^2} : x \in \mathbb{R} \right\}.$

Aufgabe 5 (Übung):

Bestimmen Sie jeweils die Menge M aller $x \in \mathbb{R}$, für die die folgenden Gleichungen bzw. Ungleichungen gelten.

(a) $|2x - 10| \leq x$,

(b) $|x - 2||x + 2| = 5$,

(c) $|x + 2| > |x - 3|$,

(d) $|2 - |2 - x|| = 2$.

Aufgabe 6 (Tutorium):

Bestimmen Sie jeweils die Menge M aller $x \in \mathbb{R}$, für die die folgenden Gleichungen bzw. Ungleichungen gelten.

(a) $|4 - 3x| > 2x + 10$,

(b) $|x^2 - 4| \leq x + 2$,

(c) $|x - 4| = |x + 1|$.

(d) $||x + 1| - 2| \leq x$,