Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Analysis
Priv.-Doz. Dr. Gerd Herzog
M.Sc. Niklas Knobel
M.Sc. Sebastian Ohrem

3. Übungsblatt

Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Physik

Wintersemester 2023/24

9. November 2023

Behandelt am 16. November 2023

Aufgabe 1 (Übung):

(a) Wir definieren die *Fibonacci-Folge* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ durch die rekursive Vorschrift

$$a_0 = 0, \qquad a_1 = 1, \qquad a_n = a_{n-2} + a_{n-1} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N} \text{ mit } n \geq 2.$$

Weiter bezeichne φ den *goldene Schnitt* $\varphi := \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.
Zeigen Sie die *Formel von Binet* $a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\varphi^n - (-\varphi)^{-n})$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(b) Seien $k, l \in \mathbb{N}_0$. Zeigen Sie

$$\sum_{n=0}^{l} \binom{k+n}{k} = \binom{k+l+1}{k+1}.$$

Aufgabe 2 (Tutorium):
Zeigen Sie die ersten drei Aussagen durch vollständige Induktion.

(a) $\sum\limits_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(b) $\sum\limits_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(c) $\sum\limits_{k=1}^{n} k^{-2} < 2$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(d) Wo liegt der Fehler im folgenden Induktionsbeweis?

Behauptung: Alle Pferde haben dieselbe Farbe.

Beweis: Wir beweisen, dass in einer Gruppe von n Pferden ($n \in \mathbb{N}$) alle Pferde dieselbe Farbe haben. Da es endlich viele Pferde gibt, folgt die Behauptung durch die Wahl der entsprechenden Zahl n.

Induktionsanfang ($n = 1$): In einer Gruppe, die nur aus einem Pferd besteht, haben trivialerweise alle Pferde dieselbe Farbe.

Induktionsschluss ($n \to n+1$): Die Behauptung gelte für ein $n \in N$ (Induktionsvoraussetzung). Aus einer Gruppe $P_1, \ldots, P_{n+1}$ mit $n+1$ Pferden entfernen wir das letzte Pferd. Die restlichen n Pferde $P_1, \ldots, P_n$ haben nach Induktionsvoraussetzung dieselbe Farbe. Nun nehmen wir das letzte Pferd zurück in die Gruppe und entfernen das vorletzte Pferd aus der Gruppe. Die restliche Gruppe enthält nun wieder n Pferde $P_1, \ldots, P_{n-1}, P_{n+1}$. Nach Induktionsvoraussetzung hat nun auch P_{n+1} dieselbe Farbe wie P_1. Somit haben alle $n+1$ Pferde dieselbe Farbe.

Aufgabe 3 (Übung):

(a) Gegeben seien die zwei komplexen Zahlen $z = 3 - i$ und $w = -1 + 2i$. Bestimmen Sie den Real- und Imaginärteil sowie den Betrag von

(a) z^3,

(b) $\frac{1}{z}$,

(c) $z \cdot w$ und

(d) $\bar{z}^2 + \frac{1}{w^2}$.

Hinweis: Der zu berechnende Betrag in der Teilaufgabe (d) ist keine "schöne" Zahl.

(b) Für welche $z \in \mathbb{C}$ gilt

(a) $z = |z|$ beziehungsweise

(b) $z^2 = |z|^2$?

Aufgabe 4 (Tutorium):

(a) Skizzieren Sie die Mengen

(i) $D_0 = \{z \in \mathbb{C} \colon 1 \leq \operatorname{Re} z \leq 2, 0 \leq \operatorname{Im} z \leq 1\}$,

(ii) $D_1 = \{-z \colon z \in D_0\}$,

(iii) $D_2 = \{\mathrm{i}z \colon z \in D_0\}$,

(iv) $D_3 = \left\{z^2 \colon z \in D_0\right\}$,

(v) $D_4 = \left\{z^{-1} \colon z \in D_0\right\}$,

(vi) $C_1 = \{z \in \mathbb{C} \colon |z - 3 - \mathrm{i}| < 1 \text{ und } |z - 2 + \mathrm{i}| \leq 2\}$,

(vii) $C_2 = \left\{z \in \mathbb{C} \colon |z + \mathrm{i}| + |z - \mathrm{i}| = \frac{10}{3}\right\}$.

(b) Das Polynom p ist durch

$$p(z) = z^4 + (1 + \mathrm{i})z^3 + (6 + \mathrm{i})z^2 + 6z$$

gegeben. Zerlegen Sie p in Linearfaktoren.

Aufgabe 5 (Übung):

(a) Sei p ein reelles Polynom und $z \in \mathbb{C}$ eine Nullstelle von p. Zeigen Sie, dass dann auch $\bar{z}$ eine Nullstelle von p ist.

(b) Zerlegen Sie jeweils das Polynom in Linearfaktoren:

(i) $p(z) = z^4 + 2z^3 + 5z^2 + 2z + 4$

(ii) $p(z) = z^3 - 3z^2 - 8z + 30$

Hinweis: Eine Nullstelle von p ist $3 + \mathrm{i}$.

Aufgabe 6 (Tutorium):

Sind die folgenden Aussagen stets wahr oder (zumindest manchmal) falsch? Dabei sind $X, Y \subseteq \mathbb{R}$ nichtleere beschränkte Mengen.

(a) W □ F □ $\sup X$ und $\inf X$ existieren.

(b) W □ F □ $\inf X < \sup X$.

(c) W □ F □ $\sup\{-x \colon x \in X\} = -\inf X$.

(d) W □ F □ $\sup\{|x| \colon x \in X\} = |\sup X|$.

(e) W □ F □ $\sup\{xy \colon x \in X, y \in Y\} = \sup X \cdot \sup Y$.

(f) W □ F □ $\sup(X \cup Y) = \max\{\sup X, \sup Y\}$.

(g) W □ F □ $\inf(X \cap Y) = \max\{\inf X, \inf Y\}$, falls $X \cap Y \neq \emptyset$.

(h) W □ F □ $\forall x \in X : x > 0 \implies \inf X > 0$.

(i) W □ F □ $\exists x \in X : x > 0 \implies \sup X > 0$.