Institut für Analysis
Priv.-Doz. Dr. Gerd Herzog
M.Sc. Niklas Knobel
M.Sc. Sebastian Ohrem

Lösungsvorschlag zum 3. Übungsblatt

Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Physik

Wintersemester 2023/24

16. November 2023

Aufgabe 1 (Übung):

(a) Wir definieren die *Fibonacci-Folge* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ durch die rekursive Vorschrift

$$a_0 = 0, \qquad a_1 = 1, \qquad a_n = a_{n-2} + a_{n-1} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N} \text{ mit } n \geq 2.$$

Weiter bezeichne φ den *goldene Schnitt* $\varphi \coloneqq \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.
Zeigen Sie die *Formel von Binet* $a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\varphi^n - (-\varphi)^{-n})$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(b) Seien $k, l \in \mathbb{N}_0$. Zeigen Sie

$$\sum_{n=0}^{l} \binom{k+n}{k} = \binom{k+l+1}{k+1}.$$

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 1:

(a) Wir verwenden im Folgenden die Gleichung $(-\varphi)^{-1} = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Da wir im Induktionsschritt die Rekursionsformel verwenden werden und in dieser die zwei vorhergehenden Folgenglieder auftreten, müssen wir hier die Formel für die ersten beiden Folgenglieder nachrechnen. Es gilt

$$a_0 = 0 = \frac{1}{\sqrt{5}}(1-1) = \frac{1}{\sqrt{5}}\big(\varphi^0 - (-\varphi)^0\big).$$

und

$$a_1 = 1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{(1+\sqrt{5}) - (1-\sqrt{5})}{2} = \frac{1}{\sqrt{5}}\big(\varphi^1 - (-\varphi)^{-1}\big).$$

Sei $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$. Wir nehmen an, dass die Formel für a_{n-2} und a_{n-1} korrekt sind. Wir stellen fest, dass φ und $(-\varphi)^{-1}$ die beiden Lösungen der Gleichung $x^2 = 1 + x$ sind. Folglich gilt

$$\begin{aligned}
a_n &= a_{n-2} + a_{n-1} \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}\big(\varphi^{n-2} - (-\varphi)^{-n+2}\big) + \frac{1}{\sqrt{5}}\big(\varphi^{n-1} - (-\varphi)^{-n+1}\big) \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}\Big(\varphi^{n-2}(1+\varphi) - (-\varphi)^{-n+2}\big(1 + (-\varphi)^{-1}\big)\Big) \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}\big(\varphi^n - (-\varphi)^{-n}\big).
\end{aligned}$$

(b) Wir führen einen Beweis durch vollständige Induktion über l.
Zunächst gilt für $l = 0$

$$\sum_{n=0}^{l} \binom{k+n}{k} = \binom{k}{k} = 1 = \binom{k+1}{k+1} = \binom{k+l+1}{k+1}.$$

Wir nehmen an, dass für ein festes aber beliebiges $l \in \mathbb{N}$ bereits Induktionsvoraussetzung (IV)

$$\sum_{n=0}^{l} \binom{k+n}{k} = \binom{k+l+1}{k+1}.$$

gilt. Nach Lemma aus dem Abschnitt 4.10 gilt

$$\binom{k+l+1}{k} + \binom{k+l+1}{k+1} = \binom{k+l+2}{k+1}.$$

Dann gilt für $l+1$

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{l+1} \binom{k+n}{k} &= \binom{k+l+1}{k} + \sum_{n=0}^{l} \binom{k+n}{k} \\ &\overset{\text{(IV)}}{=} \binom{k+l+1}{k} + \binom{k+l+1}{k+1} = \binom{k+l+2}{k+1}.\end{aligned}$$

Nach dem Prinzip der vollständigen Induktion gilt die Darstellung.

Aufgabe 2 (Tutorium):
Zeigen Sie die ersten drei Aussagen durch vollständige Induktion.

(a) $\sum\limits_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(b) $\sum\limits_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(c) $\sum\limits_{k=1}^{n} k^{-2} < 2$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(d) Wo liegt der Fehler im folgenden Induktionsbeweis?

Behauptung: Alle Pferde haben dieselbe Farbe.

Beweis: Wir beweisen, dass in einer Gruppe von n Pferden ($n \in \mathbb{N}$) alle Pferde dieselbe Farbe haben. Da es endlich viele Pferde gibt, folgt die Behauptung durch die Wahl der entsprechenden Zahl n.

Induktionsanfang ($n = 1$): In einer Gruppe, die nur aus einem Pferd besteht, haben trivialerweise alle Pferde dieselbe Farbe.

Induktionsschluss ($n \to n+1$): Die Behauptung gelte für ein $n \in N$ (Induktionsvoraussetzung). Aus einer Gruppe $P_1, \ldots, P_{n+1}$ mit $n+1$ Pferden entfernen wir das letzte Pferd. Die restlichen n Pferde $P_1, \ldots, P_n$ haben nach Induktionsvoraussetzung dieselbe Farbe. Nun nehmen wir das letzte Pferd zurück in die Gruppe und entfernen das vorletzte Pferd aus der Gruppe. Die restliche Gruppe enthält nun wieder n Pferde $P_1, \ldots, P_{n-1}, P_{n+1}$. Nach Induktionsvoraussetzung hat nun auch P_{n+1} dieselbe Farbe wie P_1. Somit haben alle $n+1$ Pferde dieselbe Farbe.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 2:

(a) Für $n = 1$ gilt

$$\sum_{k=1}^{1} k^2 = 1 = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{6}.$$

Es sei nun $n \in \mathbb{N}$. Wir nehmen an, dass die Aussage

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

gilt. Daraus folgt

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} k^2 &= \sum_{k=1}^{n} k^2 + (n+1)^2 \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 \\ &= \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}.\end{aligned}$$

Aus dem Prinzip der vollständigen Induktion folgt die Behauptung.

(b) Für $n = 1$ sehen wir, dass die Aussage

$$\sum_{k=1}^{1} k^3 = 1 = \frac{1 \cdot 2^2}{4}$$

richtig ist.

Es sei nun $n \in \mathbb{N}$. Wir nehmen an, dass die Aussage

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

gilt. Damit berechnen wir

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^3 = \sum_{k=1}^{n} k^3 + (n+1)^3 \overset{\text{(IV)}}{=} \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3 = \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}.$$

Aus dem Prinzip der vollständigen Induktion folgt die Behauptung.

(c) Wenn man versucht, die angegebene Aussage mit vollständiger Induktion zu beweisen, wird man vermutlich nicht direkt zum Ziel kommen. Man kann nämlich aus der Induktionsannahme keine sinnvolle Information für den Induktionsschritt verwenden. Der Trick besteht darin, dass man stattdessen versucht, eine schärfere Ungleichung zu beweisen. Dies scheint zwar im ersten Moment schwieriger zu sein, allerdings führt es hier deshalb zum Ziel, weil man bei einer schärferen Aussage auch im Induktionsschritt eine stärkere Voraussetzung aus der Induktionsannahme verwenden kann. Konkret zeigen wir im Folgenden, dass sogar

$$\sum_{k=1}^{n} k^{-2} \leq 2 - \frac{1}{n} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}$$

gilt. Der Beweis ist nun nicht schwer.

Für $n = 1$ erhalten wir die wahre Aussage $\sum_{k=1}^{1} k^{-2} = 1 \leq 2 - \frac{1}{1}$.

Es sei nun $n \in \mathbb{N}$ und wir nehmen an, dass

$$\sum_{k=1}^{n} k^{-2} \leq 2 - \frac{1}{n}$$

gilt. Wir berechnen mit dieser Annahme

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^{-2} = \sum_{k=1}^{n} k^{-2} + \frac{1}{(n+1)^2} \leq 2 - \frac{1}{n} + \frac{1}{(n+1)^2} \leq 2 - \frac{1}{n+1}.$$

Im letzten Schritt haben wir verwendet, dass

$$\frac{1}{(n+1)^2} \leq \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

gilt. Aus dem Prinzip der vollständigen Induktion folgt nun die Behauptung.

(d) Das Problem ist, dass die Argumentation des Induktionsschlusses nicht beim Schritt von 1 nach 2, also für $n = 1$, funktioniert. Aus einer Gruppe von $n + 1 = 2$ Pferden können wir nicht zwei verschiedene Pferde entfernen und dabei ein festes Pferd (im Beweis mit P_1 bezeichnet) in den resultierenden Gruppen haben. Wäre der Beweis erbracht, dass je zwei Pferde immer dieselbe Farbe haben, so würde der Induktionsschluss jedoch funktionieren.

Aufgabe 3 (Übung):

(a) Gegeben seien die zwei komplexen Zahlen $z = 3 - i$ und $w = -1 + 2i$. Bestimmen Sie den Real- und Imaginärteil sowie den Betrag von

  (a) z^3,

  (b) $\frac{1}{z}$,

  (c) $z \cdot w$ und

  (d) $\bar{z}^2 + \frac{1}{w^2}$.

  Hinweis: Der zu berechnende Betrag in der Teilaufgabe (d) ist keine "schöne" Zahl.

(b) Für welche $z \in \mathbb{C}$ gilt

  (a) $z = |z|$ beziehungsweise

  (b) $z^2 = |z|^2$?

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 3:

(a) Wir berechnen vorbereitend:

$$|z| = |3 - i| = \sqrt{3^2 + 1^1} = \sqrt{10}$$

und

$$|w| = |-1 + 2i| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2} = \sqrt{5}$$

  (a) Es gilt

$$z^3 = (3 - i)^3 = 3^3 - 3 \cdot 3^2 i + 3 \cdot 3(i)^2 - (i)^3 = 18 - 26i$$

  und damit

$$\begin{aligned} \mathrm{Re}(z^3) &= 18, \\ \mathrm{Im}(z^3) &= -26, \\ \left|z^3\right| &= |z|^3 = 10\sqrt{10}. \end{aligned}$$

  (b) Es gilt

$$\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{z\overline{z}} = \frac{\overline{z}}{|z|^2} = \frac{1}{10}(3 + i)$$

  und damit

$$\begin{aligned} \mathrm{Re}(z^{-1}) &= \frac{3}{10}, \\ \mathrm{Im}(z^{-1}) &= \frac{1}{10}, \\ \left|z^{-1}\right| &= \frac{1}{|z|} = \frac{1}{\sqrt{10}}. \end{aligned}$$

  (c) Es gilt

$$z \cdot w = (3 - i) \cdot (-1 + 2i) = -3 - 2(i)^2 + i(1 + 6) = -1 + 7i$$

  und damit

$$\begin{aligned} \mathrm{Re}(z \cdot w) &= -1, \\ \mathrm{Im}(z \cdot w) &= 7 \text{ und somit} \\ |z \cdot w| &= |z| \cdot |w| = 5\sqrt{2}. \end{aligned}$$

  (d) Es gilt

$$\overline{z}^2 + \frac{1}{w^2} = (3 + i)^2 + \frac{\overline{w}^2}{|w|^4} = 3^2 + 6i - 1 + \frac{(-1 - 2i)^2}{25}$$

$$= 8 + 6i + \frac{1}{25}(1 + 4i - 4) = 8 - \frac{3}{25} + \left(6 + \frac{4}{25}\right)i$$

und damit

$$\begin{aligned}
\operatorname{Re}(\overline{z}^2 + \frac{1}{w^2}) &= 8 - \frac{3}{25} = \frac{197}{25},\\
\operatorname{Im}(\overline{z}^2 + \frac{1}{w^2}) &= 6 + \frac{4}{25} = \frac{154}{25},
\end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned}
\left|\overline{z}^2 + \frac{1}{w^2}\right| &= \sqrt{\left(\frac{197}{25}\right)^2 + \left(\frac{154}{25}\right)^2}\\
&= \frac{1}{25}\sqrt{38809 + 23716} = \frac{\sqrt{2501}}{5}.
\end{aligned}$$

(b) Für $z \in \mathbb{C}$ setzen wir $x = \operatorname{Re} z$ und $y = \operatorname{Im} z$. Es gelten die folgenden Äquivalenzen

$$\begin{aligned}
z = |z| &\iff x + iy = \sqrt{x^2 + y^2}\\
&\iff x = \sqrt{x^2} \wedge y = 0\\
&\iff z \in \mathbb{R}_{\geq 0}
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
z^2 = |z|^2 &\iff x^2 - y^2 + 2ixy = x^2 + y^2\\
&\iff xy = 0 \wedge x^2 - y^2 = x^2 + y^2\\
&\iff y = 0\\
&\iff z \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Aufgabe 4 (Tutorium):

(a) Skizzieren Sie die Mengen

(i) $D_0 = \{z \in \mathbb{C} \colon 1 \leq \operatorname{Re} z \leq 2, 0 \leq \operatorname{Im} z \leq 1\}$,

(ii) $D_1 = \{-z \colon z \in D_0\}$,

(iii) $D_2 = \{\mathrm{i}z \colon z \in D_0\}$,

(iv) $D_3 = \left\{z^2 \colon z \in D_0\right\}$,

(v) $D_4 = \left\{z^{-1} \colon z \in D_0\right\}$,

(vi) $C_1 = \{z \in \mathbb{C} \colon |z - 3 - \mathrm{i}| < 1 \text{ und } |z - 2 + \mathrm{i}| \leq 2\}$,

(vii) $C_2 = \left\{z \in \mathbb{C} \colon |z + \mathrm{i}| + |z - \mathrm{i}| = \frac{10}{3}\right\}$.

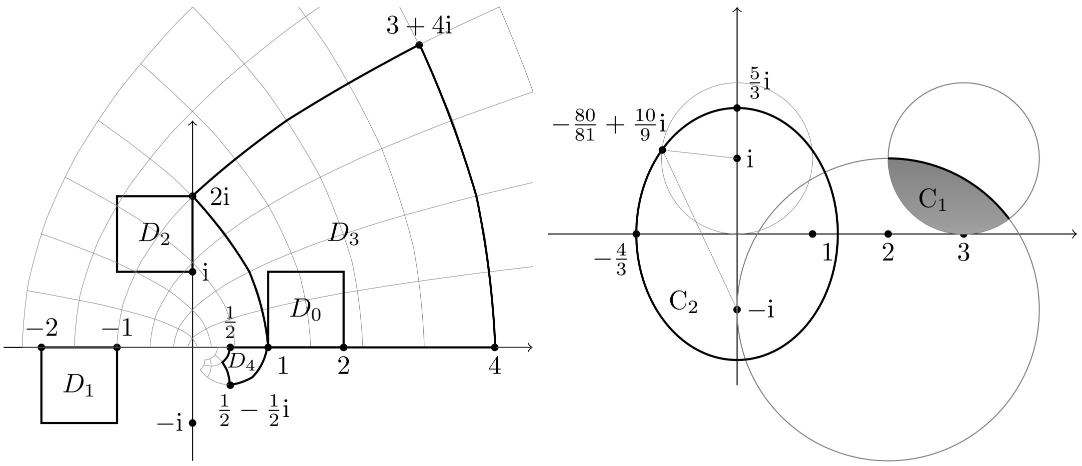
(b) Das Polynom p ist durch

$$p(z) = z^4 + (1 + \mathrm{i})z^3 + (6 + \mathrm{i})z^2 + 6z$$

gegeben. Zerlegen Sie p in Linearfaktoren.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 4:

(a) Skizze der Mengen D_0, D_1, D_2, D_3, D_4, C_1 und C_2.



(b) Offensichtlichst ist 0 eine Nullstelle von p, denn es gilt

$$p(z) = z(z^3 + (1+\mathrm{i})z^2 + (6+\mathrm{i})z + 6).$$

Eine weitere Nullstelle des Ausdrucks in Klammern ist gegeben durch -1, denn

$$-1 + (1+\mathrm{i}) - (6+\mathrm{i}) + 6 = 0.$$

Die restliche Nullstellen von p finden wir durch eine Polynomdivision.

$$\begin{array}{ccccccc}
(z^3 & + & (1+\mathrm{i})z^2 & + & (6+\mathrm{i})z & + & 6) \div (z+1) = z^2 + \mathrm{i}z + 6. \\
z^3 & + & z^2 & & & & \\
 & & \mathrm{i}z^2 & + & (6+\mathrm{i})z & & \\
 & & \mathrm{i}z^2 & + & \mathrm{i}z & & \\
 & & & & 6z & + & 6 \\
 & & & & 6z & + & 6 \\
 & & & & & & 0
\end{array}$$

Nun suchen wir noch die Nullstellen von $z^2 + \mathrm{i}z + 6$. Es gilt

$$z^2 + \mathrm{i}z + 6 = 0 \iff \left(z + \frac{\mathrm{i}}{2}\right)^2 = -\frac{25}{4} \iff z + \frac{\mathrm{i}}{2} = \pm\frac{5\mathrm{i}}{2} \iff z = \frac{(-1\pm 5)\mathrm{i}}{2}.$$

Somit gilt

$$p(z) = z(z+1)(z-2\mathrm{i})(z+3\mathrm{i}).$$

Aufgabe 5 (Übung):

(a) Sei p ein reelles Polynom und $z \in \mathbb{C}$ eine Nullstelle von p. Zeigen Sie, dass dann auch $\overline{z}$ eine Nullstelle von p ist.

(b) Zerlegen Sie jeweils das Polynom in Linearfaktoren:

(i) $p(z) = z^4 + 2z^3 + 5z^2 + 2z + 4$

(ii) $p(z) = z^3 - 3z^2 - 8z + 30$
Hinweis: Eine Nullstelle von p ist $3 + \mathrm{i}$.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 5:

(a) Seien $n \in \mathbb{N}$ und $a_k \in \mathbb{R}$ für $k \in \{0, \dots, n\}$. Sei p ein reelles Polynom der Form

$$p(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$$

Es gelte $p(z) = 0$ für ein $z \in \mathbb{C}$. Daraus folgt

$$p(\overline{z}) = \sum_{k=0}^{n} a_k \overline{z}^k = \sum_{k=0}^{n} \overline{a_k}\,\overline{z^k} = \sum_{k=0}^{n} \overline{a_k z^k} = \overline{\sum_{k=0}^{n} a_k z^k} = \overline{p(z)} = \overline{0} = 0.$$

Also ist $\overline{z}$ ebenfalls eine Nullstelle von p.

(b) (i) Eine Nullstelle des Polynoms ist i, und damit ist nach Teil (a) $-$i eine weitere Nullstelle, denn p ist ein reelles Polynom.

Die restliche Nullstellen von p finden wir durch eine Polynomdivision, wobei wir $(z - \mathrm{i})(z + \mathrm{i}) = z^2 + 1$ verwenden.

$$\begin{array}{rcrcrcrcrl}
(z^4 & + & 2z^3 & + & 5z^2 & + & 2z & + & 4) & \div (z^2+1) = z^2 + 2z + 4. \\
z^4 & + & 0 & + & z^2 & & & & & \\
 & & 2z^3 & + & 4z^2 & + & 2z & & & \\
 & & 2z^3 & + & 0 & + & 2z & & & \\
 & & & & 4z^2 & + & 0 & + & 4 & \\
 & & & & 4z^2 & + & 0 & + & 4 & \\
 & & & & & & & & 0 &
\end{array}$$

Nun suchen wir noch die Nullstellen von $z^2 + \mathrm{i}z + 6$. Es gilt

$$z^2 + 2z + 4 = 0 \iff (z+1)^2 = -3 \iff z + 1 = \pm \mathrm{i}\sqrt{3} \iff z = -1 \pm \mathrm{i}\sqrt{3}.$$

Somit gilt

$$p(z) = (z + \mathrm{i})(z - \mathrm{i})(z + 1 + \mathrm{i}\sqrt{3})(z + 1 - \mathrm{i}\sqrt{3}).$$

(ii) Nach dem Hinweis ist $3 + \mathrm{i}$ eine Nullstelle von p, und damit $3 - \mathrm{i}$ eine weitere. Nun könnte man wie in (i) vorgehen um die letzte Nullstelle zu finden. Wir präsentieren hier einen anderen Ansatz. Wir wissen nach dem Fundamentalsatz der Algebra, dass

$$p(z) = (z - 3 - \mathrm{i})(z - 3 + \mathrm{i})(z - \lambda)$$

gilt, wobei $\lambda \in \mathbb{C}$ die noch zu findende dritte Nullstelle ist. Damit gilt aber auch

$$30 = p(0) = (-3 - \mathrm{i})(-3 + \mathrm{i})(-\lambda) = -10\lambda,$$

also ist $\lambda = -3$ und

$$p(z) = (z - 3 - \mathrm{i})(z - 3 + \mathrm{i})(z + 3).$$

Hier steckt eine allgemeinere Aussage dahinter. Ist nämlich

$$z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_0 = \prod_{k=1}^{n} (z - z_k)^n$$

ein normiertes Polynom von Grad n, so gelten

$$a_0 = (-1)^n \prod_{k=1}^{n} z_k \quad \text{und auch} \quad a_{n-1} = -\sum_{k=1}^{n} z_k.$$

Das Produkt und die Summe der Nullstellen kann man einem Polynom also direkt ablesen.

Aufgabe 6 (Tutorium):
Sind die folgenden Aussagen stets wahr oder (zumindest manchmal) falsch? Dabei sind $X, Y \subseteq \mathbb{R}$ nichtleere beschränkte Mengen.

(a) W □ F □ $\sup X$ und $\inf X$ existieren.

(b) W □ F □ $\inf X < \sup X$.

(c) W □ F □ $\sup\{-x \colon x \in X\} = -\inf X$.

(d) W □ F □ $\sup\{|x| \colon x \in X\} = |\sup X|$.

(e) W □ F □ $\sup\{xy \colon x \in X, y \in Y\} = \sup X \cdot \sup Y$.

(f) W □ F □ $\sup(X \cup Y) = \max\{\sup X, \sup Y\}$.

(g) W □ F □ $\inf(X \cap Y) = \max\{\inf X, \inf Y\}$, falls $X \cap Y \neq \emptyset$.

(h) W □ F □ $\forall x \in X : x > 0 \implies \inf X > 0$.

(i) W □ F □ $\exists x \in X : x > 0 \implies \sup X > 0$.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 6:

W ■ F □ $\sup X$ und $\inf X$ existieren.

Diese Aussage ist wahr nach dem Vollständigkeitsaxiom (A15) und der Folgerung darunter.

W □ F ■ $\inf X < \sup X$.

Diese Aussage ist falsch. Betrachte zum Beispiel $X = \{0\}$. Es gilt $\inf\{0\} = 0 = \sup\{0\}$.

W ■ F □ $\sup\{-x \colon x \in X\} = -\inf X$.

Diese Aussage wurde im Beweis von der Folgerung zu (A15) gezeigt.

W □ F ■ $\sup\{|x| \colon x \in X\} = |\sup X|$.

Diese Aussage ist falsch, wie man am Beispiel $X = \{-1, 0\}$ sieht. Hier gilt $|\sup X| = 0$, aber $\sup\{|x| \colon x \in X\} = 1$.

Wenn man

$$\{|x| \colon x \in X\} = \{x \colon x \in X, x \geq 0\} \cup \{-x\}x \in X, x \leq 0$$

schreibt, dann kann man aus dem dritten und sechsten Teil dieser Aufgabe, die wahre Aussage

$$\sup\{|x| \colon x \in X\} = \max\{|\sup X|, |\inf X|\}$$

kombinieren.

W □ F ■ $\sup\{xy \colon x \in X, y \in Y\} = \sup X \sup Y$.

Um zu sehen, dass diese Aussage falsch ist, setzen wir $X = \{-1, 0\}$ und $Y = \{-1\}$. Dann gilt $\sup X = 0$ und $\sup Y = -1$, also $\sup X \sup Y = 0$. Andererseits gilt $\{xy\}x \in X, y \in Y = \{1, 0\}$ und somit $\sup\{xy \colon x \in X, y \in Y\} = 1$.

W ■ F □ $\sup(X \cup Y) = \max\{\sup X, \sup Y\}$.

Diese Aussage ist wahr. Setze $\gamma = \max\{\sup X, \sup Y\}$. Für alle $x \in X$ gilt $x \leq \sup X \leq \gamma$ und für alle $x \in Y$ gilt ebenfalls $x \leq \sup Y \leq \gamma$. Somit haben wir $x \leq \gamma$ für alle $x \in X \cup Y$ gezeigt, d.h., γ ist eine obere Schranke von $X \cup Y$. Sei $\tilde{\gamma}$ eine obere Schranke von $X \cup Y$. Für alle $x \in X$ gilt $x \leq \tilde{\gamma}$ und für alle $x \in Y$ gilt $x \leq \tilde{\gamma}$. Daher ist $\tilde{\gamma} \geq \sup X$ und $\tilde{\gamma} \geq \sup Y$. Also insgesamt $\tilde{\gamma} \geq \max\{\sup X, \sup Y\}$. Es folgt die Behauptung.

W □ F ■ $\inf(X \cap Y) = \max\{\inf X, \inf Y\}$, falls $X \cap Y \neq \emptyset$.

Diese Aussage ist falsch, wie man am Beispiel $X = \{0, 2\}$ und $Y = \{1, 2\}$ sieht. In diesem Beispiel gilt $\inf(X \cap Y) = \inf\{2\} = 2$ und $\max\{\inf X, \inf Y\} = \max\{0, 1\} = 1$. Man kann zeigen, dass in dieser Situation die Aussage $\inf(X \cap Y) \geq \max\{\inf X, \inf Y\}$ immer richtig ist.

W F
☐ ■ $\forall\, x \in X : x > 0 \implies \inf X > 0.$

Diese Aussage ist falsch, denn es gelten $\inf(0,1) = 0$ und $x > 0$ für alle $x \in (0,1)$.

W F
■ ☐ $\exists\, x \in X : x > 0 \implies \sup X > 0.$

Wir beweisen die Aussage mit dem Prinzip der Kontraposition. Es gelte also $\sup X \leq 0$. Dann ist nach Definition des Supremums 0 eine obere Schranke von X. Dies bedeutet, dass $x \leq 0$ für alle $x \in X$ gilt. Wir haben also die Aussage

$$\sup X \leq 0 \implies \forall\, x \in X : x \leq 0$$

gezeigt. Nach Regeln 1.3 aus dem Skript ist dies äquivalent zu der hier behaupteten Aussage.