Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Analysis
Priv.-Doz. Dr. Gerd Herzog
M.Sc. Niklas Knobel
M.Sc. Sebastian Ohrem

4. Übungsblatt

Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Physik

Wintersemester 2023/24

16. November 2023

Behandelt am 23. November 2023

Wichtige Informationen:

Die Klausur HM I (Physik) findet am **14.03.2024 (Do.), 11:00-13:00** statt. Die Hörsaaleinteilung wird rechtzeitig bekannt gegeben. Sie können sich ab sofort zur Klausur anmelden.

Anmeldeschluss: **07.03.2024**. Danach ist keine Anmeldung mehr möglich!

Abmeldeschluss: 1 Minute vor Beginn der Prüfung

Informationen zur Prüfung finden Sie (demnächst) auf `https://www.math.kit.edu/lehre/seite/klausurtermine/`

Aufgabe 1 (Übung):
Sei (a_n) eine reelle oder komplexe Zahlenfolge. Zeigen Sie, dass (a_n) genau dann konvergiert, wenn (a_{2n}) und (a_{2n+1}) konvergieren und $\lim_{n\to\infty} a_{2n} = \lim_{n\to\infty} a_{2n+1}$ gilt.

Aufgabe 2 (Tutorium):
Sei (a_n) eine Folge in $\mathbb{R}$ mit $\alpha := \limsup_{n\to\infty} a_n$ und $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$ mit $\gamma < \alpha < \beta$.

(i) Zeigen Sie, dass $a_n < \beta$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

(ii) Zeigen Sie, dass $a_n > \gamma$ für unendlich viele $n \in \mathbb{N}$ gilt.

Aufgabe 3 (Übung):
Untersuchen Sie die nachstehend definierten Folgen auf Konvergenz und bestimmen Sie ggf. den jeweiligen Grenzwert.

(i) $(a_n) = \left(\frac{6n^2+3n-4}{1+n^2+5n^3}\right)_{n\in\mathbb{N}}$,

(ii) $(b_n) = \left(\sqrt[n]{2^n+3^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$,

(iii) $(c_n) = \left(\sqrt{9n^2+2n+1} - 3n\right)_{n\in\mathbb{N}}$,

(iv) $(d_n) = \left(\left(1-\frac{1}{n}\right)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$,

(v) $(e_n) = \left(\sqrt[n]{n!}\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

Aufgabe 4 (Tutorium):
Untersuchen Sie die nachstehend definierten Folgen auf Konvergenz und bestimmen Sie ggf. den jeweiligen Grenzwert.

(i) $(a_n) = \left(\frac{n^2-1}{n+3} - \frac{n^3+1}{n^2+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$,

(ii) $(b_n) = \left(\sqrt{4n^2+8064n+2016} - 2n\right)_{n\in\mathbb{N}}$,

(iii) $c_n = \begin{cases} \frac{1}{2} + \left(\frac{3+4i}{15}\right)^n & \text{für gerade } n, \\ \sqrt{n+\sqrt{n}} - \sqrt{n} & \text{für ungerade } n \end{cases} \qquad (n \in \mathbb{N}),$

(iv) $(d_n) = \left(\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$,

(v) $(e_n) = \left(\frac{a^n - a^{-n}}{a^n + a^{-n}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$, $a > 0$ fest.

Aufgabe 5 (Übung):
Untersuchen Sie die durch

$$a_1 = \sqrt{2}, \qquad a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n} \quad (n \in \mathbb{N})$$

rekursiv definierte Folge (a_n) auf Konvergenz und bestimmen Sie ggf. ihren Grenzwert.

Aufgabe 6 (Tutorium):
Untersuchen Sie die durch

$$a_1 = 1, \qquad a_{n+1} = \frac{2 + 4a_n}{4 + 3a_n} \quad (n \in \mathbb{N})$$

rekursiv definierte Folge (a_n) auf Konvergenz und bestimmen Sie ggf. ihren Grenzwert.