Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Analysis
Priv.-Doz. Dr. Gerd Herzog
M.Sc. Niklas Knobel
M.Sc. Sebastian Ohrem

Lösungsvorschlag zum 4. Übungsblatt

Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Physik

Wintersemester 2023/24

23. November 2023

Aufgabe 1 (Übung):
Sei (a_n) eine reelle oder komplexe Zahlenfolge. Zeigen Sie, dass (a_n) genau dann konvergiert, wenn (a_{2n}) und (a_{2n+1}) konvergieren und $\lim_{n\to\infty} a_{2n} = \lim_{n\to\infty} a_{2n+1}$ gilt.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 1:

- $\Rightarrow$: Sei (a_n) konvergent gegen $a \in \mathbb{C}$. Zu zeigen ist, dass $a_{2n} \to a$ und $a_{2n+1} \to a$ für $n \to \infty$. Sei dazu $\varepsilon > 0$ vorgelegt. Da $a_n \to a$, existiert ein $n_0(\varepsilon)$ so, dass $|a_n - a| < \varepsilon$ für alle $n \geq n_0(\varepsilon)$. Wegen $2k + 1 > 2k > k$ für alle $k \in \mathbb{N}$, gilt erst recht $|a_{2n} - a| < \varepsilon$ und $|a_{2n+1} - a| < \varepsilon$ für alle $n \geq n_0(\varepsilon)$. Dies beweist die Konvergenz von (a_{2n}) und (a_{2n+1}) gegen a.

- $\Leftarrow$: Seien (a_{2n}) und (a_{2n+1}) konvergent gegen ein $a \in \mathbb{C}$. Zu zeigen ist, dass (a_n) gegen a konvergiert. Sei dazu ein $\varepsilon > 0$ vorgelegt. Da $a_{2n+1} \to a$ und $a_{2n} \to a$, existieren $n_1(\varepsilon), n_2(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ derart, dass

$$\forall n \geq n_1(\varepsilon) : \; |a_{2n+1} - a| < \varepsilon \qquad \text{und} \qquad \forall n \geq n_2(\varepsilon) : \; |a_{2n} - a| < \varepsilon$$

Definiere $n_0(\varepsilon) := \max\{2n_1(\varepsilon) + 1, 2n_2(\varepsilon)\}$. Für alle $n \geq n_0(\varepsilon)$ gilt $|a_n - a| < \varepsilon$, denn: Ist $n > n_0(\varepsilon)$ ungerade, also $n = 2k + 1$ für ein $k \in \mathbb{N}_0$, so gilt

$$n = 2k + 1 \geq n_0(\varepsilon) \geq 2n_1(\varepsilon) + 1 \Rightarrow k \geq n_1(\varepsilon).$$

Ist n gerade, also $n = 2k$ für ein $k \in \mathbb{N}$, so gilt

$$n = 2k \geq n_0(\varepsilon) \geq 2n_2(\varepsilon) \Rightarrow k \geq n_2(\varepsilon).$$

In beiden Fällen gilt nach Voraussetzung $|a_n - a| < \varepsilon$.

Aufgabe 2 (Tutorium):
Sei (a_n) eine Folge in $\mathbb{R}$ mit $\alpha := \limsup_{n\to\infty} a_n$ und $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$ mit $\gamma < \alpha < \beta$.

(i) Zeigen Sie, dass $a_n < \beta$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

(ii) Zeigen Sie, dass $a_n > \gamma$ für unendlich viele $n \in \mathbb{N}$ gilt.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 2:
Mit der Definition vom $\limsup$ gilt für $b_n = \sup\{a_m : \; m \geq n\}$, dass $\lim_{n\to\infty} b_n = \limsup_{n\to\infty} a_n = \alpha$.

(i) Sei $\varepsilon := \beta - \alpha > 0$, damit existiert $n_0 \in \mathbb{N}$, sodass für alle $n \geq n_0$ gilt $|b_n - \alpha| < \varepsilon$. Es folgt für alle $n \geq n_0$, dass

$$a_n \leq \sup_{m \geq n} a_m = b_n = b_n - \alpha + \alpha < \varepsilon + \alpha = \beta.$$

Somit gilt $a_n < \beta$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$.

(ii) Wir beweisen die Annahme mit einem Widerspruch. Angenommen es existieren nur endlich viele a_n, sodass $a_n > \gamma$. Damit existiert $n_0 = \max\{n : \; a_n > \gamma\}$ und somit gilt für alle $n \geq n_0 + 1$ dass $a_n \leq \gamma$. Damit gilt für alle $n \geq n_0 + 1$, dass $b_n \leq \gamma$ und $\lim_{n\to\infty} b_n \leq \gamma < \alpha$ was ein Wiederspruch ist.

Aufgabe 3 (Übung):
Untersuchen Sie die nachstehend definierten Folgen auf Konvergenz und bestimmen Sie ggf. den jeweiligen Grenzwert.

(i) $(a_n) = \left(\frac{6n^2+3n-4}{1+n^2+5n^3}\right)_{n\in\mathbb{N}}$,

(ii) $(b_n) = \left(\sqrt[n]{2^n+3^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$,

(iii) $(c_n) = \left(\sqrt{9n^2+2n+1}-3n\right)_{n\in\mathbb{N}}$,

(iv) $(d_n) = \left(\left(1-\frac{1}{n}\right)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$,

(v) $(e_n) = \left(\sqrt[n]{n!}\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 3:

(i) Es folgt

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{6n^2+3n-4}{1+n^2+5n^3} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{6}{n}+\frac{3}{n^2}-\frac{4}{n^3}}{\frac{1}{n^3}+\frac{1}{n}+5} = 0.$$

(ii) Es gilt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$b_n = \sqrt[n]{2^n+3^n} \geq \sqrt[n]{3^n} = 3,$$

sowie

$$b_n = \sqrt[n]{2^n+3^n} = 3\sqrt[n]{1+\left(\frac{2}{3}\right)^n} \leq 3\sqrt[n]{2}.$$

Wegen $\sqrt[n]{2} \to 1$ (Beispiel 6.5 (2) der Vorlesung), gilt nach dem Sandwichtheorem ((3) in Abschnitt 6.3 des Skriptes) $\lim_{n\to\infty} b_n = 3$.

(iii) Es gilt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} c_n = \sqrt{9n^2+2n+1}-3n &= \left(\sqrt{9n^2+2n+1}-3n\right)\cdot\frac{\sqrt{9n^2+2n+1}+3n}{\sqrt{9n^2+2n+1}+3n} \\ &= \frac{2n+1}{\sqrt{9n^2+2n+1}+3n} = \frac{2+\frac{1}{n}}{\sqrt{9+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}+3}. \end{aligned}$$

Mit den Rechenregeln für Grenzwerte und dieser Darstellung folgt $\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{2}{\sqrt{9}+3} = \frac{1}{3}$.

(iv) Für jedes $n \geq 2$ gilt

$$\begin{aligned} d_n &= \left(1-\frac{1}{n}\right)^n = \left(\frac{n-1}{n}\right)^n = \left(\frac{n}{n-1}\right)^{-n} = \left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{-n} \\ &= \left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{-1}\cdot\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{1-n} = \frac{1-\frac{1}{n}}{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}} \end{aligned}$$

Der Zähler konvergiert mit Mitteln der Vorlesung gegen 1. Der Nenner konvergiert nach Abschnitt 6.6 des Skriptes gegen die Eulersche Zahl. Also gilt $\lim_{n\to\infty} d_n = \frac{1}{e}$.

(v) Konvergente Folgen sind beschränkt (Satz im Abschnitt 6.2 des Skriptes). Wir zeigen, dass (d_n) unbeschränkt ist und damit nicht konvergent sein kann. Sei dazu $k \in \mathbb{N}$. Es ist

$$(2k)! = \underbrace{2k\cdot(2k-1)\cdot\ldots\cdot(k+1)}_{k \text{ Faktoren, jeder } \geq k}\cdot\underbrace{k\cdot\ldots\cdot 1}_{\geq 1} \geq k^k.$$

Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt damit

$$d_{2n^2} = \sqrt[2n^2]{(2n^2)!} \geq \sqrt[2n^2]{(n^2)^{n^2}} = \sqrt[2n^2]{n^{2n^2}} = n.$$

Da die natürlichen Zahlen nicht nach oben beschränkt sind (Satz (2) im Abschnitt 4.7 des Skriptes), ist $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in der Tat nicht nach oben beschränkt.

Aufgabe 4 (Tutorium):
Untersuchen Sie die nachstehend definierten Folgen auf Konvergenz und bestimmen Sie ggf. den jeweiligen Grenzwert.

(i) $(a_n) = \left(\frac{n^2-1}{n+3} - \frac{n^3+1}{n^2+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$,

(ii) $(b_n) = \left(\sqrt{4n^2+8064n+2016} - 2n\right)_{n\in\mathbb{N}}$,

(iii) $c_n = \begin{cases} \frac{1}{2} + \left(\frac{3+4i}{15}\right)^n & \text{für gerade } n, \\ \sqrt{n+\sqrt{n}} - \sqrt{n} & \text{für ungerade } n \end{cases} \qquad (n \in \mathbb{N})$,

(iv) $(d_n) = \left(\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$,

(v) $(e_n) = \left(\frac{a^n - a^{-n}}{a^n + a^{-n}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$, $a > 0$ fest.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 4:

(i) Es folgt

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} a_n &= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2-1}{n+3} - \frac{n^3+1}{n^2+1}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{(n^2-1)(n^2+1) - (n^3+1)(n+3)}{(n^2+1)(n+3)} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{n^4 - 1 - (n^4+3n^3+n+3)}{(n^2+1)(n+3)} = \lim_{n\to\infty} \frac{-3n^3-n-4}{(n^2+1)(n+3)} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{-3-\frac{1}{n^2}-\frac{4}{n^3}}{\left(1+\frac{1}{n^2}\right)\left(1+\frac{3}{n}\right)} = -3.
\end{aligned}$$

(ii) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\begin{aligned}
\sqrt{4n^2+8064n+2016} - 2n &= \left(\sqrt{4n^2+8064n+2016} - 2n\right) \\
&\quad \cdot \frac{\sqrt{4n^2+8064n+2016}+2n}{\sqrt{4n^2+8064n+2016}+2n} \\
&\overset{\text{3. Binom.}}{=} \frac{4n^2+8064n+2016-4n^2}{\sqrt{4n^2+8064n+2016}+2n} \\
&= \frac{8064n+2016}{\sqrt{4n^2+8064n+2016}+2n} \\
&= \frac{8064+\frac{2016}{n}}{2\left(\sqrt{1+\frac{8064}{4n}+\frac{2016}{4n^2}}+1\right)}
\end{aligned}$$

Mit den Rechenregeln für Grenzwerte und dieser Darstellung folgt

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{4n^2+8064n+2016} - 2n = \lim_{n\to\infty} \frac{8064+\frac{2016}{n}}{2\left(\sqrt{1+\frac{8064}{4n}+\frac{2016}{4n^2}}+1\right)} = \frac{8064}{2\cdot 2} = 2016.$$

(iii) Betrachte die Teilfolgen $(c_{2k})_{k\in\mathbb{N}}$, sowie $(c_{2k+1})_{k\in\mathbb{N}}$. Es gilt $\left|\frac{3+4i}{15}\right| = \frac{\sqrt{9+16}}{15} = \frac{\sqrt{25}}{15} = \frac{1}{3}$ und damit $\lim_{k\to\infty}\left(\frac{3+4i}{15}\right)^{2k} = 0$. Hieraus folgt

$$\lim_{k\to\infty} c_{2k} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{2} + \left(\frac{3+4i}{15}\right)^{2k} = \frac{1}{2}.$$

Ferner gilt

$$\lim_{k\to\infty} c_{2k+1} = \lim_{k\to\infty} \sqrt{(2k+1)+\sqrt{2k+1}} - \sqrt{2k+1}$$

$$= \lim_{k\to\infty}\left(\sqrt{(2k+1)+\sqrt{2k+1}}-\sqrt{2k+1}\right)\cdot\frac{\sqrt{(2k+1)+\sqrt{2k+1}}+\sqrt{2k+1}}{\sqrt{(2k+1)+\sqrt{2k+1}}+\sqrt{2k+1}}$$

$$= \lim_{k\to\infty}\frac{\sqrt{2k+1}}{\sqrt{(2k+1)+\sqrt{2k+1}}+\sqrt{2k+1}} = \lim_{k\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{2k+1}}}+1} = \frac{1}{2}.$$

Nach Aufgabe 1 folgt, dass $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $\frac{1}{2}$ konvergiert.

(iv) Nach Abschnitt 6.6 des Skriptes konvergiert $(\tilde{d}_n) := \left(\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}\right)$ gegen die Eulersche Zahl. Insbesondere ist $(\tilde{e}_n)$ beschränkt, etwa $\tilde{e}_n \le 4$ für alle $n\in\mathbb{N}$. Es gilt für alle $n\in\mathbb{N}$

$$1 \le e_n = \left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n = \sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}} \le \sqrt[n]{4}$$

Wegen $\sqrt[n]{4}\to 1$ (Beispiel 6.5 (2) der Vorlesung), gilt nach dem Sandwichtheorem ((3) in Abschnitt 6.3 des Skriptes) $\lim_{n\to\infty} e_n = 1$.

(v) Wir unterscheiden die folgenden drei Fälle und benutzen jeweils die Ergebnisse des Kapitels 6 des Skriptes.

- Ist $a>1$, so gilt $\frac{1}{a}<1$ und damit $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{a}\right)^{2n}=0$. Es folgt

$$\lim_{n\to\infty} e_n = \lim_{n\to\infty}\frac{a^n-a^{-n}}{a^n+a^{-n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1-a^{-2n}}{1+a^{-2n}} = \frac{\lim_{n\to\infty}1-\left(\frac{1}{a}\right)^{2n}}{\lim_{n\to\infty}1+\left(\frac{1}{a}\right)^{2n}} = 1.$$

- Ist $a=1$, so gilt für alle $n\in\mathbb{N}$

$$\frac{a^n-a^{-n}}{a^n+a^{-n}} = \frac{0}{2} = 0$$

  und damit $\lim_{n\to\infty} e_n = 0$.

- Ist $a<1$, so gilt $\lim_{n\to\infty} a^{2n}=0$. Es folgt

$$\lim_{n\to\infty} e_n = \lim_{n\to\infty}\frac{a^n-a^{-n}}{a^n+a^{-n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{a^{2n}-1}{a^{2n}+1} = \frac{\lim_{n\to\infty}a^{2n}-1}{\lim_{n\to\infty}a^{2n}+1} = -1.$$

Aufgabe 5 (Übung):
Untersuchen Sie die durch

$$a_1=\sqrt{2}, \qquad a_{n+1}=\sqrt{2+a_n} \quad (n\in\mathbb{N})$$

rekursiv definierte Folge (a_n) auf Konvergenz und bestimmen Sie ggf. ihren Grenzwert.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 5:
Angenommen, (a_n) ist konvergent gegen $a\in\mathbb{R}$. Induktiv sieht man ein, dass $a_n\ge\sqrt{2}\ge 0$ für alle $n\in\mathbb{N}$. Nach (3) im Satz aus dem Abschnitt 6.3 des Skriptes gilt also $a\ge 0$. Ferner gilt

$$a=\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}a_{n+1}=\lim_{n\to\infty}\sqrt{2+a_n}=\sqrt{\lim_{n\to\infty}2+a_n}=\sqrt{2+\lim_{n\to\infty}a_n}=\sqrt{2+a}.$$

Auflösen nach a liefert

$$a^2=|2+a| \overset{a\ge 0}{\Leftrightarrow} a^2=2+a \Leftrightarrow a^2-a-2=0 \Leftrightarrow a\in\left\{\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{1}{4}+2},\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}+2}\right\}=\{-1,2\}.$$

Wegen $a_n\ge 0$ für alle $n\in\mathbb{N}$, ist $a=2$ der einzige Kandidat für den Grenzwert. Wegen $a_1=\sqrt{2}<2$ liegt die Vermutung nahe, dass (a_n) monoton wachsend ist. Für $n\in\mathbb{N}$ gilt

$$a_{n+1}-a_n=\sqrt{2+a_n}-a_n=\frac{2+a_n-a_n^2}{\sqrt{2+a_n}+a_n}\ge 0$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \quad a_n^2 - a_n - 2 = \left(a_n - \frac{1}{2}\right)^2 - 2 - \frac{1}{4} \leq 0\\
&\Leftrightarrow \quad \left(a_n - \frac{1}{2}\right)^2 \leq \frac{9}{4}\\
&\overset{a_n \geq \sqrt{2} > \frac{1}{2}}{\Leftrightarrow} \quad a_n \leq \frac{1}{2} + \frac{3}{2} = 2.
\end{aligned}$$

Also ist (a_n) monoton wachsend, falls $a_n \leq 2$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Die letzte Aussage beweisen wir durch vollständige Induktion über n.

- *IA* ($n = 1$): In der Tat ist $a_1 = \sqrt{2} \leq 2$.
- *IS* ($n \rightsquigarrow n+1$): Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig. Für dieses n gelte die *IV* $a_n \leq 2$. Dann gilt für $n+1$ tatsächlich $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n} \overset{\text{(IV)}}{\leq} \sqrt{2+2} = 2$.

Also ist (a_n) nach oben beschränkt und monoton wachsend. Nach dem Satz aus Abschnitt 6.4 des Skriptes ist (a_n) konvergent. Nach Obigem ist $\lim_{n\to\infty} a_n = 2$.

Aufgabe 6 (Tutorium):
Untersuchen Sie die durch

$$a_1 = 1, \qquad a_{n+1} = \frac{2 + 4a_n}{4 + 3a_n} \quad (n \in \mathbb{N})$$

rekursiv definierte Folge (a_n) auf Konvergenz und bestimmen Sie ggf. ihren Grenzwert.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 6:
Angenommen, (a_n) ist konvergent gegen $a \in \mathbb{R}$. Induktiv sieht man ein, dass $a_n \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Nach (3) im Satz aus dem Abschnitt 6.3 des Skriptes gilt also $a \geq 0$. Ferner gilt

$$a = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{2 + 4a_n}{4 + 3a_n} = \frac{2 + 4a}{4 + 3a}.$$

Auflösen nach a liefert

$$4a + 3a^2 = 2 + 4a \Leftrightarrow a^2 = \frac{2}{3} \overset{a \geq 0}{\Leftrightarrow} a = \sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Also ist $a = \sqrt{\frac{2}{3}}$ der einzige Kandidat für den Grenzwert. Wegen $a_1 = 1 > a$, liegt die Vermutung nahe, dass (a_n) monoton fallend ist. Für $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$a_{n+1} - a_n = \frac{2 + 4a_n}{4 + 3a_n} - a_n \leq 0 \overset{a_n \geq 0}{\Leftrightarrow} 2 + 4a_n \leq 4a_n + 3a_n^2 \Leftrightarrow \frac{2}{3} \leq a_n^2 \overset{a_n \geq 0}{\Leftrightarrow} \sqrt{\frac{2}{3}} \leq a_n.$$

Also ist (a_n) monoton fallend, falls $a_n \geq \sqrt{\frac{2}{3}}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Die letzte Aussage beweisen wir durch vollständige Induktion über n.

- *IA* ($n = 1$): In der Tat ist $a_1 = 1 \geq \sqrt{\frac{2}{3}}$.
- *IS* ($n \rightsquigarrow n+1$): Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig. Für dieses n gelte die *IV* $a_n \geq \sqrt{\frac{2}{3}}$. Dann gilt für $n+1$ tatsächlich

$$\begin{aligned}
&a_{n+1} \geq \sqrt{\frac{2}{3}} \overset{a_{n+1} \geq 0}{\Leftrightarrow} a_{n+1}^2 = \left(\frac{2 + 4a_n}{4 + 3a_n}\right)^2 \geq \frac{2}{3} \Leftrightarrow 3(2 + 4a_n)^2 \geq 2(4 + 3a_n)^2\\
\Leftrightarrow \quad &12 + 48a_n + 48a_n^2 \geq 32 + 48a_n + 18a_n^2 \Leftrightarrow 30a_n^2 \geq 20 \overset{a_n \geq 0}{\Leftrightarrow} a_n \geq \sqrt{\frac{2}{3}} \Leftrightarrow \text{(IV)}.
\end{aligned}$$

Also ist (a_n) nach unten beschränkt und monoton fallend. Nach dem Satz aus Abschnitt 6.4 des Skriptes ist (a_n) konvergent. Nach Obigem ist $\lim_{n\to\infty} a_n = \sqrt{\frac{2}{3}}$.