Institut für Analysis
Priv.-Doz. Dr. Gerd Herzog
M.Sc. Niklas Knobel
M.Sc. Sebastian Ohrem

5. Übungsblatt

Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Physik

Wintersemester 2023/24

23. November 2023

Behandelt am 30. November 2023

Aufgabe 1 (Übung):

(a) Seien $(a_n), (b_n)$ reelle Folgen. Zeigen Sie oder widerlegen Sie durch ein Gegenbeispiel:

(i) $\limsup\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \limsup\limits_{n\to\infty} a_n + \limsup\limits_{n\to\infty} b_n$

(ii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert, (b_n) beschränkt $\implies \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ konvergiert.

(iii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert absolut, (b_n) beschränkt $\implies \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ konvergiert absolut.

(iv) $a_n \to 0 \implies \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n}$ konvergiert.

(b) Sei (a_n) eine reelle Folge mit $\mathbb{Q} = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$. Bestimmen Sie die Häufungswerte von (a_n).

Aufgabe 2 (Tutorium):
Bestimmen Sie jeweils die Häufungswerte der Folge (a_n) sowie $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n$ und $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n$.

(a) $a_n = (1 + (-1)^n)^n$.

(b) $a_n = (-1 + \frac{1}{2}(-1)^{n+1})^{n+1}$.

(c) $a_n = (-1)^n \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n-1}$.

(d) $a_n = \begin{cases} 1 + \frac{1}{2^n}, & n = 3k \text{ für ein } k \in \mathbb{N}, \\ 2, & n = 3k-1 \text{ für ein } k \in \mathbb{N}, \\ 2 + \frac{n+1}{n}, & n = 3k-2 \text{ für ein } k \in \mathbb{N}. \end{cases}$

Aufgabe 3 (Übung):
Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz und absolute Konvergenz.

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n}$,

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n!}{n^n}$,

(c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{n+1}$,

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{n^2+3}$,

(e) $\displaystyle\sum_{n=-7}^{\infty} \frac{n^2+3n}{n^4+n^3-15n-1}$,

(f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(n-1)^{n+1}}{n^n}$.

Aufgabe 4 (Tutorium):
Untersuchen Sie die nachstehenden Reihen auf Konvergenz und absolute Konvergenz.

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n-1}{n}\right)^{n}.$

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}$

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\binom{5n}{4n}^{-1}$

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+4}{n^2-3n+1}$

(e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathrm{i}^n}{n}$

(f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)$

Aufgabe 5 (Übung):
Zeigen Sie, dass $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt[n]{n!}}=\mathrm{e}$ gilt.

Hinweis: Sie können ohne Beweis verwenden, dass für eine reelle Folge (a_n) mit $a_n \neq 0$ ffa $n \in \mathbb{N}$ die folgende Ungleichungskette gilt:

$$\liminf_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq \liminf_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} \leq \limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} \leq \limsup_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|.$$

Bonus: Beweisen Sie die Ungleichungskette.

Aufgabe 6 (Tutorium):
Für welche $x \in \mathbb{R}$ bzw. $z \in \mathbb{C}$ konvergieren die folgenden Reihen?

(a) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2n+1}{(n-1)^2}x^n$

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{e}^{n(1+(-1)^n)}x^{2n}$

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)z^n$

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(z+3\mathrm{i})^n}{n^2}$