Institut für Analysis
Priv.-Doz. Dr. Gerd Herzog
M.Sc. Niklas Knobel
M.Sc. Sebastian Ohrem

Lösungsvorschlag zum 5. Übungsblatt

Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Physik

Wintersemester 2023/24

30. November 2023

Aufgabe 1 (Übung):

(a) Seien $(a_n), (b_n)$ reelle Folgen. Zeigen Sie oder widerlegen Sie durch ein Gegenbeispiel:

(i) $\limsup\limits_{n\to\infty}(a_n+b_n) = \limsup\limits_{n\to\infty} a_n + \limsup\limits_{n\to\infty} b_n$

(ii) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert, (b_n) beschränkt $\implies \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ konvergiert.

(iii) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert absolut, (b_n) beschränkt $\implies \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ konvergiert absolut.

(iv) $a_n \to 0 \implies \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n}$ konvergiert.

(b) Sei (a_n) eine reelle Folge mit $\mathbb{Q} = \{a_n \colon n \in \mathbb{N}\}$. Bestimmen Sie die Häufungswerte von (a_n).

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 1:

(a) Seien (a_n) und (b_n) Folgen.

(i) $\limsup\limits_{n\to\infty}(a_n+b_n) = \limsup\limits_{n\to\infty} a_n + \limsup\limits_{n\to\infty} b_n$:
Die Aussage ist falsch. Als Gegenbeispiel betrachten wir $a_n = (-1)^n$ und $b_n = (-1)^{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n + b_n = 0$ aber $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n + \limsup\limits_{n\to\infty} b_n = 2$.

(ii) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert, (b_n) beschränkt $\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ konvergiert:
Die Aussage ist falsch. Als Gegenbeispiel betrachten wir $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$ und $b_n = (-1)^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Die alternierende harmonische Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ konvergiert nach dem Leibnizkriterium, die Folge (b_n) ist beschränkt aber die harmonische Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ ist divergent.

(iii) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert absolut, (b_n) beschränkt $\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ konvergiert absolut.
Die Aussage ist wahr. Es sei $C > 0$ mit $|b_n| \leq C$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Sei $N \in \mathbb{N}$. Es gilt

$$\sum_{n=1}^{N} |a_n b_n| \leq C \sum_{n=1}^{N} |a_n| \leq C \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty,$$

wobei wir verwendet haben, dass die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergiert. Aus dieser Abschätzung folgt, dass auch die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ absolut konvergiert.

(iv) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0 \Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n}$ konvergiert.
Diese Aussage ist falsch. Für jedes $k \in \mathbb{N}$ setzen wir $a_1 = 1$ und $a_n = \frac{1}{k}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $2^{k-1} < n \leq 2^k$. Wie im Beweis der Divergenz der harmonische Reihe folgt damit

$$\sum_{n=1}^{2^N} \frac{a_n}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \cdots \geq \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k}$$

für jedes $N \in \mathbb{N}$. Da die harmonische Reihe divergiert, folgt hieraus die Divergenz der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n}$.

(b) *Behauptung:* Es gilt $H((a_n)) = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$.

Beweis: "$\subseteq$" ist klar, da (a_n) eine reelle Folge ist

"$\supseteq$": **Teil 1:** Sei zunächst $x \in \mathbb{R}$. Um $x \in H((a_n))$ zu zeigen, genügt es nach (1) im Satz in 6.8 zu zeigen, dass für jedes $\varepsilon > 0$ gilt:

$$a_n \in (x - \varepsilon, x + \varepsilon) \text{ für unendlich viele } n \in \mathbb{N}.$$

Wir führen einen Beweis per Widerspruch. Sei also $\varepsilon > 0$ und es gelte $a_n \in (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ nur für endlich viele $n \in \mathbb{N}$. Diese Zahlen bezeichnen wir mit $a_{n_1}, a_{n_2}, \ldots, a_{n_p}$. Nach (2) im Satz in 4.9 existiert aber eine rationale Zahl q mit

$$x - \varepsilon < q < \min\{a_{n_1}, \ldots, a_{n_p}, x + \varepsilon\}$$

Wegen $q \in \mathbb{Q}$ gibt es eine $n \in \mathbb{N}$ mit $q = a_n$. Wegen $a_n \in (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ muss a_n eines der Zahlen $a_{n_1}, \ldots, a_{n_p}$ sein, was aber nach Konstruktion nicht sein kann. Also muss unsere Annahme falsch gewesen sein.

Bis jetzt haben wir gezeigt, dass $\mathbb{R} \subseteq H((a_n))$ gilt.

Teil 2: Um zu zeigen, dass $-\infty$ und $+\infty$ in $H((a_n))$ liegen, verwenden wir die folgende Charakterisierung:

Behauptung: Sei (a_n) eine reelle Folge. Dann gelten:

$$\infty \in H((a_n)) \iff \forall C \in \mathbb{R}\colon a_n > C \text{ für unendlich viele } n \in \mathbb{N}$$
$$-\infty \in H((a_n)) \iff \forall C \in \mathbb{R}\colon a_n < C \text{ für unendlich viele } n \in \mathbb{N}$$

Beweis: Wir zeigen nur die Aussage für ∞, die Aussage für $-\infty$ folgt daraus unter Betrachtung der Folge $(-a_n)$.

"$\implies$": Ist $\infty \in H((a_n))$, so gibt es eine Teilfolge $(a_{k(n)})$ mit $a_{k(n)} \to \infty$. Für $C \in \mathbb{R}$ gilt dann $a_{k(n)} > C$ ffa $n \in \mathbb{N}$, und damit (beachte k ist injektiv) auch $a_n > C$ für unendlich viele n.

"$\impliedby$": Zu $C = 1$ existiert ein $k(1) \in \mathbb{N}$ mit $a_{k(1)} > 1$.
Zu $C = \max\{2, a_{k(1)}\}$ existiert ein $k(2) \in \mathbb{N}$ mit $a_{k(2)} > \max\{a_{k(1)}, 2\}$ und $k(2) > k(1)$
Zu $C = \max\{3, a_{k(2)}\}$ existiert ein $k(3) \in \mathbb{N}$ mit $a_{k(3)} > \max\{a_{k(2)}, 3\}$ und $k(3) > k(2)$ etc.
Es existiert also eine Teilfolge $(a_{k(n)})$ mit $a_{k(n)} > n$ für $n \in \mathbb{N}$. Somit gilt $a_{k(n)} \to \infty$. □

Den Rest des Beweises kann man analog zu Teil 1 führen, nur mit $q = \max\{a_{n_1}, \ldots, a_{n_p}\} + 1$ für ∞ und $q = \min\{a_{n_1}, \ldots, a_{n_p}\} - 1$ für $-\infty$. □

Aufgabe 2 (Tutorium):
Bestimmen Sie jeweils die Häufungswerte der Folge (a_n) sowie $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n$ und $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n$.

(a) $a_n = (1 + (-1)^n)^n$.

(b) $a_n = (-1 + \frac{1}{2}(-1)^{n+1})^{n+1}$.

(c) $a_n = (-1)^n \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n-1}$.

(d) $a_n = \begin{cases} 1 + \frac{1}{2^n}, & n = 3k \text{ für ein } k \in \mathbb{N}, \\ 2, & n = 3k - 1 \text{ für ein } k \in \mathbb{N}, \\ 2 + \frac{n+1}{n}, & n = 3k - 2 \text{ für ein } k \in \mathbb{N}. \end{cases}$

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 2:

(a) Wir betrachten die zwei Teilfolgen (a_{2k}) und (a_{2k+1}). Für jedes $k \in \mathbb{N}$ gilt

$$a_{2k} = 2^{2k} = 4^k \quad \text{und} \quad a_{2k+1} = 0.$$

Folglich ist (a_{2k}) nach oben unbeschränkt mit $a_{2k} \to \infty$ für $k \to \infty$ und es gilt $\lim_{k\to\infty} a_{2k+1} = 0$. Da diese beiden Teilfolgen die komplette Folge abdecken, gilt (vgl. Übung)

$$H(a_n) = \{0, \infty\}, \quad \limsup_{n\to\infty} a_n = \infty \quad \text{und} \quad \liminf_{n\to\infty} a_n = 0.$$

(b) Wir betrachten die zwei Teilfolgen (a_{2k}) und (a_{2k+1}). Für jedes $k \in \mathbb{N}$ gilt

$$a_{2k} = \left(-\frac{3}{2}\right)^{2k+1} = -\left(\frac{3}{2}\right)^{2k+1} \quad \text{und} \quad a_{2k+1} = \left(-\frac{1}{2}\right)^{2k+2} = \left(\frac{1}{2}\right)^{2k+2}.$$

Wir erhalten die nach unten unbeschränkte Folge (a_{2k}) mit $a_{2k} \to -\infty$ für $k \to \infty$ und $\lim_{k\to\infty} a_{2k+1} = 0$. Da diese beiden Teilfolgen die komplette Folge abdecken, gilt

$$H(a_n) = \{-\infty, 0\}, \quad \limsup_{n\to\infty} a_n = 0 \quad \text{und} \quad \liminf_{n\to\infty} a_n = -\infty.$$

(c) Wir betrachten die zwei Teilfolgen (a_{2k}) und (a_{2k+1}). Für jedes $k \in \mathbb{N}$ gilt

$$a_{2k} = \left(\frac{2k+2}{2k+1}\right)^{2k-1} = \left(1 + \frac{1}{2k+1}\right)^{2k+1}\left(1 + \frac{1}{2k+1}\right)^{-2}$$

und

$$a_{2k+1} = -\left(\frac{2k+3}{2k+2}\right)^{2k} = -\left(1 + \frac{1}{2k+2}\right)^{2k+2}\left(1 + \frac{1}{2k+2}\right)^{-2}.$$

Wir erhalten $\lim_{k\to\infty} a_{2k} = \mathrm{e}$ und $\lim_{k\to\infty} a_{2k+1} = -\mathrm{e}$. Da diese beiden Teilfolgen die komplette Folge abdecken, gilt

$$H(a_n) = \{-\mathrm{e}, \mathrm{e}\}, \quad \limsup_{n\to\infty} a_n = \mathrm{e} \quad \text{und} \quad \liminf_{n\to\infty} a_n = -\mathrm{e}.$$

(d) Wir betrachten die drei Teilfolgen (a_{3k}), (a_{3k-1}) und (a_{3k-2}). Für jedes $k \in \mathbb{N}$ gilt

$$a_{3k} = 1 + \frac{1}{8^k}, \quad a_{3k-1} = 2, \quad \text{und} \quad a_{3k-2} = 2 + \frac{(3k-2)+1}{3k-2} = 3 + \frac{1}{3k-2}.$$

Somit gilt

$$\lim_{k\to\infty} a_{3k} = 1, \quad \lim_{k\to\infty} a_{3k-1} = 2 \quad \text{und} \quad \lim_{k\to\infty} a_{3k-2} = 3.$$

Da die drei Teilfolgen die komplette Folge abdecken, erhalten wir

$$H(a_n) = \{1, 2, 3\}, \quad \limsup_{n\to\infty} a_n = 3 \quad \text{und} \quad \liminf_{n\to\infty} a_n = 1.$$

Aufgabe 3 (Übung):
Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz und absolute Konvergenz.

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n}$,

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n!}{n^n}$,

(c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{n+1}$,

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{n^2+3}$,

(e) $\displaystyle\sum_{n=-7}^{\infty} \frac{n^2+3n}{n^4+n^3-15n-1}$,

(f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(n-1)^{n+1}}{n^n}$.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 3:

(a) *Behauptung:* Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n}$ konvergiert absolut.

Beweis: Wir verwenden das Wurzelkriterium. Es gilt

$$\sqrt[n]{\frac{2^n n!}{n^n}} = 2 \cdot \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} \to 2 \cdot \frac{1}{\mathrm{e}} \quad (n \to \infty)$$

nach Aufgabe 5, also $\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{2^n n!}{n^n}} = 2 \cdot \frac{1}{\mathrm{e}} < 1$. Nach dem Wurzelkriterium konvergiert die Reihe absolut.

Alternativ kann man hier mit dem Quotientenkriterium vorgehen und benötigt dann die Aussage von Aufgabe 5 nicht. $\square$

(b) *Behauptung:* Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n!}{n^n}$ divergiert.

Beweis: Wir verwenden das Wurzelkriterium. Es gilt

$$\sqrt[n]{\frac{3^n n!}{n^n}} = 3 \cdot \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} \to 3 \cdot \frac{1}{\mathrm{e}} \quad (n \to \infty)$$

nach Aufgabe 5, also $\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{3^n n!}{n^n}} = 3 \cdot \frac{1}{\mathrm{e}} > 1$. Nach dem Wurzelkriterium divergiert die Reihe.

Alternativ kann man hier mit dem Quotientenkriterium vorgehen und benötigt dann die Aussage von Aufgabe 5 nicht. $\square$

(c) *Behauptung:* Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{n+1}$ konvergiert, aber konvergiert nicht absolut.

Beweis: Wir definieren die Folge (a_n) durch $a_n := (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Wir zeigen zunächst die Konvergenz der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ mit Hilfe des Leibniz-Kriteriums. Die Folge $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ ist alternierend, und es gilt

$$|a_n| = \frac{\sqrt{n}}{n+1} \leq \frac{\sqrt{n}}{n} = \frac{1}{\sqrt{n}} \to 0 \quad (n \to \infty).$$

Außerdem gilt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} &= \frac{\sqrt{n+1}}{n+2} \cdot \frac{n+1}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{(n+1)(n+1)^2}{n(n+2)^2}} = \sqrt{\frac{n^3+3n^2+3n+1}{n^3+4n^2+4n}} \leq \sqrt{\frac{n^3+3n^2+3n+n}{n^3+4n^2+4n}} \\ &= \sqrt{\frac{n^3+3n^2+4n}{n^3+4n^2+4n}} \leq \sqrt{1} = 1,\end{aligned}$$

also $|a_{n+1}| \leq |a_n|$. Somit ist $(|a_n|)_{n=1}^{\infty}$ eine monoton fallende Nullfolge. Nach dem Leibniz-Kriterium ist daher die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n |a_n|$ konvergent.

Wir zeigen nun mit Hilfe des Minorantenkriteriums, dass die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ nicht absolut konvergiert. Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$|a_n| = \frac{\sqrt{n}}{n+1} \geq \frac{\sqrt{n}}{n+n} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} \geq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n}.$$

Da die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ nach Vorlesung divergiert, ist auch $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ nach dem Minorantenkriterium divergent und somit auch $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$. $\square$

(d) *Behauptung:* Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{n^2+3}$ konvergiert absolut.

Beweis: Wir verwenden das Majorantenkriterium. Dazu sei $n \in \mathbb{N}$. Es gilt

$$\left|(-1)^n \frac{\sqrt{n}}{n^2+3}\right| = \frac{\sqrt{n}}{n^2+3} \leq \frac{\sqrt{n}}{n^2} = \frac{1}{n^{3/2}}$$

Nach Vorlesung konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$, weshalb $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{\sqrt{n}}{n^2+3}$ nach dem Majorantenkriterium absolut konvergiert. $\square$

(e) *Behauptung:* Die Reihe $\sum_{n=-7}^{\infty} \frac{n^2+3n}{n^4+n^3-15n-1}$ konvergiert absolut.

Beweis: Wir verwenden das Majorantenkriterium. Dazu sei $n \in \mathbb{Z}$ mit $n \geq 4$. Wir schätzen ab:

$$n^2 + 3n \leq 4n^2, \qquad n^4 + n^3 - 15n - 1 \geq n^4 + n \cdot 4^2 - 15n - n = n^4$$

und erhalten somit

$$\left|\frac{n^2+3n}{n^4+n^3-15n-1}\right| = \frac{n^2+3n}{n^4+n^3-15n-1} \leq \frac{4n^2}{n^4} = \frac{4}{n^2}$$

Nach Vorlesung konvergiert $\sum_{n=4}^{\infty} \frac{4}{n^2}$, weswegen $\sum_{n=-7}^{\infty} \frac{n^2+3n}{n^4+n^3-15n-1}$ nach dem Majorantenkriterium absolut konvergent. $\square$

(f) *Behauptung:* Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{(n-1)^{n+1}}{n^n}$ divergiert.

Beweis: Wir zeigen, dass $(-1)^n \frac{(n-1)^{n+1}}{n^n}$ keine Nullfolge bildet. Nach Vorlesung kann die Reihe in diesem Fall nicht konvergieren. Sei dazu $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$. Es gilt:

$$\left|(-1)^n \frac{(n-1)^{n+1}}{n^n}\right| = \frac{(n-1)^{n+1}}{n^n} \geq \frac{(n-1)^n}{n^n} = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \to \frac{1}{\mathrm{e}} > 0, \quad (n \to \infty). \qquad \square$$

Aufgabe 4 (Tutorium):
Untersuchen Sie die nachstehenden Reihen auf Konvergenz und absolute Konvergenz.

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n-1}{n}\right)^n.$

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}$

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\binom{5n}{4n}^{-1}$

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+4}{n^2-3n+1}$

(e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathrm{i}^n}{n}$

(f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)$

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 4:

(a) Setze $a_n = (\frac{n-1}{n})^n$ für jedes $n \in \mathbb{N}$. Es gilt

$$a_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$$

und damit nach Übung $\lim_{n\to\infty} a_n = \mathrm{e}^{-1}$. Damit ist (a_n) keine Nullfolge und $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\frac{n-1}{n})^n$ divergiert.

(b) Setze $a_n = \frac{1}{2^n}(\frac{n+1}{n})^{n^2}$ für jedes $n \in \mathbb{N}$. Es gilt

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

für jedes $n \in \mathbb{N}$. Wir erhalte $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{\mathrm{e}}{2} > 1$. Deshalb divergiert die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}(\frac{n+1}{n})^{n^2}$ nach dem Wurzelkriterium.

(c) Setze $a_n = \binom{5n}{4n}^{-1}$ für jedes $n \in \mathbb{N}$. Es gilt

$$\begin{aligned}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \frac{(4(n+1))!(n+1)!(5n)!}{(5(n+1))!(4n)!n!} \\ &= \frac{(4n+4)(4n+3)(4n+2)(4n+1)(n+1)}{(5n+5)(5n+4)(5n+3)(5n+2)(5n+1)} \\ &= \frac{(4+\frac{4}{n})(4+\frac{3}{n})(4+\frac{2}{n})(4+\frac{1}{n})(1+\frac{1}{n})}{(5+\frac{5}{n})(5+\frac{4}{n})(5+\frac{3}{n})(5+\frac{2}{n})(5+\frac{1}{n})}\end{aligned}$$

für jedes $n \in \mathbb{N}$. Wir erhalten $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{4^4}{5^5} < 1$. Deshalb ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}\binom{5n}{4n}^{-1}$ absolut konvergent nach dem Quotientenkriterium.

(d) Setze $a_n = \frac{n+4}{n^2-3n+1}$ für jedes $n \in \mathbb{N}$. Für jedes $n \geq 3$ gilt $-3n+1 \leq 0$. Daher folgt

$$a_n \geq \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n}$$

für jedes $n \geq 3$. Da die harmonische Reihe divergiert, divergiert auch die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+4}{n^2-3n+1}$ nach dem Minorantenkriterium

(e) Setze $a_n = \frac{\mathrm{i}^n}{n}$ für jedes $n \in \mathbb{N}$. Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathrm{i}^n}{n}$ konvergiert nicht absolut, da $|a_n| = \frac{1}{n}$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt. Sei $n = 2k$ für ein $k \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$a_{2k} = \frac{\mathrm{i}^{2k}}{2k} = \frac{(-1)^k}{2k}.$$

Sei nun $n = 2k+1$ für ein $k \in \mathbb{N}_0$. Dann gilt

$$a_{2k+1} = \frac{\mathrm{i}^{2k+1}}{2k+1} = \mathrm{i}\frac{(-1)^k}{2k+1}.$$

Deshalb gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{Re} a_n = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{Im} a_n = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1}.$$

Da die beiden Folgen $(\frac{1}{2k})_{k\in\mathbb{N}}$ und $(\frac{1}{2k+1})_{k\in\mathbb{N}}$ monoton fallende Nullfolgen sind, konvergieren beide Reihen nach dem Leibnizkriterium und damit nach Vorlesung (vgl. Bemerkung in 7.1) auch die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathrm{i}^n}{n}$.

(f) Setze $a_n = (-1)^n(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2})$ für jedes $n \in \mathbb{N}$. Es gilt

$$|a_n| = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} = \frac{1}{(n+1)(n+2)} < \frac{1}{n^2}.$$

Da die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ konvergiert, konvergiert auch die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2})$ absolut.

Aufgabe 5 (Übung):
Zeigen Sie, dass $\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = \mathrm{e}$ gilt.

Hinweis: Sie können ohne Beweis verwenden, dass für eine reelle Folge (a_n) mit $a_n \neq 0$ ffa $n \in \mathbb{N}$ die folgende Ungleichungskette gilt:

$$\liminf_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq \liminf_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} \leq \limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} \leq \limsup_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|.$$

Bonus: Beweisen Sie die Ungleichungskette.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 5:
Wir betrachten die Folge (a_n) gegeben durch $a_n = \frac{n^n}{n!}$ für $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt $a_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Für die Quotienten finden wir mit $n \in \mathbb{N}$:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{n^n}{n!}} = \frac{(n+1)^{n+1}}{n^n} \frac{n!}{(n+1)!} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathrm{e}$$

nach Definition von e. Insbesondere ist die Folge der Quotienten $\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)_{n=1}^{\infty}$ beschränkt. Nach dem Hinweis gilt nun:

$$\mathrm{e} = \liminf_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq \liminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \leq \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \leq \limsup_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \mathrm{e}.$$

Also gelten $\liminf\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \mathrm{e}$, d.h. e ist der einzige Häufungswert von $\sqrt[n]{|a_n|} = \frac{n}{\sqrt[n]{n!}}$. Die gewünschte Aussage folgt nun aus der folgenden Bemerkung:

Behauptung: Seien $b \in \mathbb{R}$ und (b_n) eine reelle Folge mit $H(b_n) = \{b\}$. Dann gilt $b_n \to b$.

Beweis: Wir nehmen an, dass $b_n \not\to b$ gilt. Dann gibt es ein $\varepsilon > 0$ und unendlich vielen $n \in \mathbb{N}$ so, dass $|b_n - b| \geq \varepsilon$ gilt. Mit diesen n bilden wir eine Teilfolge $(b_{k(n)})$ von (b_n).
Nun unterscheiden wir drei Fälle:

Fall 1: Ist $(b_{k(n)})$ nicht nach oben beschränkt, so gibt es eine Teilfolge $(b_{k_1(n)})$, die gegen ∞ geht. In diesem Fall ist $\infty \in H((b_n))$.
Fall 2: Ist $(b_{k(n)})$ nicht nach unten beschränkt, so gilt analog $-\infty \in H((b_n))$.
Fall 3: Ist $(b_{k(n)})$ beschränkt, so besitzt diese Folge nach Bolzano-Weierstraß eine konvergente Teilfolge $(b_{k_1(n)})$ mit Grenzwert $\tilde{b} \in \mathbb{R}$. Aus $\left|b_{k_1(n)} - b\right| \geq \varepsilon$ folgt $\left|\tilde{b} - b\right| \geq \varepsilon$, also $b \neq \tilde{b} \in H((b_n))$.

In jedem der drei Fälle hat die Folge (b_n) einen weiteren Häufungspunkt. Also war die Annahme falsch. □

Bonus: Wir beweisen die Ungleichungskette

$$\liminf_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq \liminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \leq \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \leq \limsup_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$$

Beweis: Gelte $a_n \neq 0$ für $n \geq n_0$.

Teil 1: Setze $\alpha := \liminf\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$. Für $\alpha = 0$ ist die erste Ungleichung klar. Gelte also $\alpha > 0$, und sei $\beta \in (0, \alpha)$. Dann gilt $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| > \beta$ ffa $n \in \mathbb{N}$, z.B. für $n \geq n_1 \geq n_0$. Für $n > n_1$ folgt damit:

$$|a_n| = \left|\frac{a_n}{a_{n-1}}\right| |a_{n-1}| > \beta |a_{n-1}| > \cdots > \beta^{n-n_1} |a_{n_1}|$$

Also ist

$$\sqrt[n]{|a_n|} > \beta \sqrt[n]{\beta^{-n_1} |a_{n_1}|}.$$

Wegen $\sqrt[n]{\beta^{-n_1}|a_{n_1}|} \to 1$ folgt daraus für $\varepsilon > 0$: $\sqrt[n]{|a_n|} \geq \beta(1-\varepsilon)$ ffa $n \in \mathbb{N}$. Dies zeigt

$$\liminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \geq \beta(1-\varepsilon).$$

Da $\beta \in (0, \alpha)$ und $\varepsilon > 0$ beliebig waren, muss bereits $\liminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \geq \alpha$ gelten.

Teil 2: Diese Ungleichung gilt nach Vorlesung (vgl. Satz in 6.10)

Teil 3: Zeigt man ähnlich wie Teil 1. □

Aufgabe 6 (Tutorium):
Für welche $x \in \mathbb{R}$ bzw. $z \in \mathbb{C}$ konvergieren die folgenden Reihen?

(a) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n+1}{(n-1)^2} x^n$

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{e}^{n(1+(-1)^n)} x^{2n}$

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right) z^n$

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z+3\mathrm{i})^n}{n^2}$

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 6:

(a) Setze $a_n = \frac{2n+1}{(n-1)^2} x^n$ für jedes $n \in \mathbb{N}$. Es gilt

$$\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \frac{2n+1}{(n-1)^2} \cdot \frac{n^2}{2n+3} \cdot |x| = \frac{1}{(1 - 1/n)^2} \cdot \frac{2 + 1/n}{2 + 3/n} \cdot |x|$$

für jedes $n \in \mathbb{N}$. Wir erhalten $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = |x|$. Nach dem Quotientenkriterium konvergiert die Reihe absolut für $|x| < 1$ und divergiert für $|x| > 1$. Wir müssen nun noch die Punkte $x = -1$ und $x = 1$, untersuchen. Dies liefert die zwei Reihen

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n+1}{(n-1)^2}(-1)^n \qquad \text{und} \qquad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n+1}{(n-1)^2}.$$

Die Konvergenz der ersten Reihe wird durch das Leibnizkriterium garantiert, denn es gilt

$$a_n = \frac{2n+1}{(n-1)^2} = \frac{2(n-1)+3}{(n-1)^2} = \frac{2}{n-1} + \frac{3}{(n-1)^2} \geq \frac{2}{n} + \frac{3}{n^2} = \frac{2n+3}{n^2} = a_{n+1}$$

für jedes $n \in \mathbb{N}$. Die zweite Reihe hingegen divergiert nach dem Minorantenkriterium, da $a_n \geq 2n/n^2 = 2/n$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt. Insgesamt konvergiert die Reihe konvergiert genau dann, wenn $x \in [-1, 1)$ gilt.

(b) Wir setzen $a_n = \mathrm{e}^{n(1+(-1)^n)} x^{2n}$ für $n \in \mathbb{N}$. Somit ist

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \mathrm{e}^{1+(-1)^n} x^2$$

Die Folge auf der rechten Seite hat die Häufungswerte x^2 und $\mathrm{e}^2 x^2$, also ist

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \mathrm{e}^2 x^2.$$

Nach den Quotientenkriterium konvergiert die Reihe absolut für $|x| < \mathrm{e}^{-1}$, und die Reihe divergiert für $|x| > \mathrm{e}^{-1}$.

Für die übrigen beiden Punkte $x = -\mathrm{e}^{-1}$ und $x = \mathrm{e}^{-1}$ haben wir

$$a_n = \mathrm{e}^{-1+(-1)^n}, \quad \text{also} \quad a_{2n} = 1.$$

Für diese x ist (a_n) keine Nullfolge und damit die Reihe divergent. Insgesamt konvergiert die Reihe konvergiert genau dann, wenn $x \in (-\mathrm{e}^{-1}, \mathrm{e}^{-1})$ gilt.

(c) Für $a_n := 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}$ gilt offenbar $1 \leq a_n \leq n$. Wegen $\sqrt[n]{n} \xrightarrow{n\to\infty} 1$ folgt hieraus $\sqrt[n]{|a_n|} \xrightarrow{n\to\infty} 1$. Für die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ gilt also

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n z^n|} = |z|,$$

d.h. die Reihe konvergiert absolut für $|z| < 1$ und divergiert für $|z| > 1$. Für $|z| = 1$ konvergiert die Reihe nicht, denn dann gilt $|a_n z^n| = a_n \xrightarrow{n\to\infty} \infty$, d.h. die Reihenglieder konvergieren nicht gegen 0.

Konvergenz der Reihe liegt also genau für $|z| < 1$ vor.

(d) Wir setzen $a_n \coloneqq \frac{(z+3\mathrm{i})^n}{n^2}$. Dann gilt

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{|z+3\mathrm{i}|}{(\sqrt[n]{n})^2} = |z+3\mathrm{i}|$$

Also konvergiert die Reihe für $|z+3\mathrm{i}| < 1$ und sie divergiert für $|z+3\mathrm{i}| > 1$.
Für z mit $|z+3\mathrm{i}| = 1$ gilt außerdem

$$|a_n| = \frac{1}{n^2} \le \frac{1}{n^2},$$

sodass die Reihe nach dem Majorantenkriterium auch für $|z+3\mathrm{i}| = 1$ absolut konvergiert.
Also konvergiert die Reihe genau für $z \in \mathbb{C}$ mit $|z+3\mathrm{i}| \le 1$.