

6. Übungsblatt

Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Physik

Wintersemester 2023/24

30. November 2023

Behandelt am 7. Dezember 2023

Aufgabe 1 (Übung):

- (a) Sei $a_n := \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$ für $n \in \mathbb{N}_0$.
- (i) Zeigen Sie, dass die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergiert.
 - (ii) Zeigen Sie, dass das Cauchyprodukt von $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ mit sich selbst divergiert. Wieso widerspricht dies nicht dem Satz über das Cauchyprodukt?
- (b) Es seien die Reihen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ gegeben durch $a_0 := -1, a_n = 1$ ($n \in \mathbb{N}$) sowie $b_0 := 2, b_n := 2^n$ ($n \in \mathbb{N}$). Zeigen Sie, dass das Cauchyprodukt beider Reihen absolut konvergiert.
- (c) Gegeben seien die Reihen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ durch $a_n = 2^{-n}$ und $b_n = 3^{-n}$, und $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ sei deren Cauchyprodukt. Berechnen Sie den Reihenwert $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ direkt sowie mithilfe des Satzes über das Cauchyprodukt.

Aufgabe 2 (Tutorium):

Bestimmen Sie jeweils alle $z \in \mathbb{C}$, für welche die Reihe konvergiert und für diese z auch den Reihenwert.

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} n z^n$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 z^n$

Aufgabe 3 (Übung):

Bestimmen Sie für die folgenden Potenzreihen jeweils den Konvergenzradius und die Menge aller $z \in \mathbb{C}$ bzw. $x \in \mathbb{R}$, für welche die Potenzreihe konvergiert.

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \right) z^n$

(d) $\sum_{n=0}^{\infty} n! z^n$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} e^{n(1+(-1)^n)} z^{2n}$

(e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n + \sqrt{n}}$

(c) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} z^{2n+1}$

Aufgabe 4 (Tutorium):

Bestimmen Sie für die folgenden Potenzreihen jeweils den Konvergenzradius und die Menge aller $z \in \mathbb{C}$ bzw. $x \in \mathbb{R}$, für welche die Potenzreihe konvergiert.

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^n} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} \right) z^{2n}$$

$$(d) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n+1}{(n-1)^2} x^n$$

$$(b) \sum_{n=0}^{\infty} 2^n z^{(n^2)}$$

$$(e) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} z^n$$

$$(c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n} (z - 2i)^n$$

Aufgabe 5 (Übung):

Zeigen Sie mit Hilfe der Additionstheoreme die folgenden Formeln für alle $z, w \in \mathbb{C}$:

$$(a) \sin(2z) = 2 \sin(z) \cos(z)$$

$$(b) \cos(2z) = 1 - 2 \sin^2(z) = 2 \cos^2(z) - 1$$

$$(c) \sin(z) + \sin(w) = 2 \sin\left(\frac{z+w}{2}\right) \cos\left(\frac{z-w}{2}\right)$$

Aufgabe 6 (Tutorium):

Untersuchen Sie jeweils, ob die Reihe konvergiert und bestimmen Sie ggf. den Reihenwert.

$$(a) \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left(-\frac{1}{2}\right)^k \right)$$

$$(d) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 + (-1)^n}{3^n}$$

$$(b) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n 2^{-n-k} \right)$$

$$(e) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)!}$$

$$(c) 0,999 \dots = \sum_{n=1}^{\infty} 9 \cdot 10^{-n}$$