Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Analysis
Priv.-Doz. Dr. Gerd Herzog
M.Sc. Niklas Knobel
M.Sc. Sebastian Ohrem

Lösungsvorschlag zum 6. Übungsblatt

Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Physik

Wintersemester 2023/24

7. Dezember 2023

Aufgabe 1 (Übung):

(a) Sei $a_n \coloneqq \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$ für $n \in \mathbb{N}_0$.

(i) Zeigen Sie, dass die Reihe $\sum_{n=0}^\infty a_n$ konvergiert.

(ii) Zeigen Sie, dass das Cauchyprodukt von $\sum_{n=0}^\infty a_n$ mit sich selbst divergiert. Wieso widerspricht dies nicht dem Satz über das Cauchyprodukt?

(b) Es seien die Reihen $\sum_{n=0}^\infty a_n$ und $\sum_{n=0}^\infty b_n$ gegeben durch $a_0 \coloneqq -1, a_n = 1$ ($n \in \mathbb{N}$) sowie $b_0 \coloneqq 2, b_n \coloneqq 2^n$ ($n \in \mathbb{N}$). Zeigen Sie, dass das Cauchyprodukt beider Reihen absolut konvergiert.

(c) Gegeben seien die Reihen $\sum_{n=0}^\infty a_n$ und $\sum_{n=0}^\infty b_n$ durch $a_n = 2^{-n}$ und $b_n = 3^{-n}$, und $\sum_{n=0}^\infty c_n$ sei deren Cauchyprodukt. Berechnen Sie den Reihenwert $\sum_{n=0}^\infty c_n$ direkt sowie mithilfe des Satzes über das Cauchyprodukt.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 1:

(a) (i) *Behauptung:* Die Reihe $\sum_{n=0}^\infty a_n$ konvergiert.

Beweis: Die Folge $(\frac{1}{\sqrt{n+1}})$ ist eine monoton fallende Nullfolge. Nach dem Leibnizkriterium ist die Reihe $\sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$ konvergent. □

(ii) *Behauptung:* Das Cauchyprodukt von $\sum_{n=0}^\infty a_n$ mit sich selbst divergiert.

Beweis: Wir bezeichnen dieses Cauchyprodukt mit $\sum_{n=0}^\infty c_n$. Dann gilt für $n \in \mathbb{N}_0$:

$$c_n = \sum_{k=0}^n a_k a_{n-k} = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{\sqrt{k+1}} \cdot \frac{(-1)^{n-k}}{\sqrt{n-k+1}} = (-1)^n \sum_{k=0}^n \frac{1}{\sqrt{n-k+1}\sqrt{k+1}}.$$

Weiter gilt:

$$|c_n| = \sum_{k=0}^n \frac{1}{\sqrt{n-k+1}\sqrt{k+1}} \geq \sum_{k=0}^n \frac{1}{\sqrt{n+1}\sqrt{n+1}} = (n+1) \cdot \frac{1}{n+1} = 1,$$

somit ist (c_n) keine Nullfolge und die Reihe $\sum_{n=0}^\infty c_n$ ist divergent.
Diese Aussage widerspricht nicht dem Satz über das Cauchyprodukt, da dieser Satz nur anwendbar ist, wenn die Reihe $\sum_{n=0}^\infty a_n$ <u>absolut</u> konvergiert. Dies ist hier nicht der Fall, da die Reihe $\sum_{n=0}^\infty |a_n| = \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{\sqrt{n+1}} \overset{m=n+1}{=} \sum_{m=1}^\infty \frac{1}{\sqrt{m}}$ nach Vorlesung divergiert. □

(b) Wir berechnen die Koeffizienten c_n des Cauchyprodukts. Zunächst ist $c_0 = a_0 b_0 = -2$. Für $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\begin{aligned} c_n &= \sum_{k=0}^n a_{n-k} b_k = a_n b_0 + \sum_{k=1}^{n-1} a_{n-k} b_k + a_0 b_n = 2 + \sum_{k=1}^{n-1} 2^k - 2^n \\ &\overset{l=k-1}{=} 2 - 2^n + 2\sum_{l=0}^{n-2} 2^l = 2 - 2^n + 2\frac{1-2^{n-1}}{1-2} = 0. \end{aligned}$$

Somit gelten $\sum_{n=0}^\infty c_n = 2$, $\sum_{n=0}^\infty |c_n| = 2$ und die Reihe ist absolut konvergent.

(c) *Teil 1:* Wir berechnen das Cauchyprodukt direkt. Zunächst berechnen wir mit den Formel für geometrische Summen c_n (vgl. 6.5 (4) im Script):

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = 3^{-n} \sum_{k=0}^{n} \left(\tfrac{3}{2}\right)^k = 3^{-n} \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^{n+1} - 1}{\frac{3}{2} - 1} = 3 \cdot 2^{-n} - 2 \cdot 3^{-n}$$

Wir erkennen hier zwei geometrische Reihen, und erhalten so den Reihenwert:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = 3 \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} - 2 \sum_{n=0}^{\infty} 3^{-n} = 3 \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} - 2 \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} = 3.$$

Teil 2: Wir berechnen den Reihenwert mit der Formel für das Cauchyprodukt. Die ist hier anwendbar, da beide Reihen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ absolut konvergieren. Also gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\right) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} = 3.$$

Wir erhalten also mit beiden Methoden den gleichen Grenzwert.

Aufgabe 2 (Tutorium):
Bestimmen Sie jeweils alle $z \in \mathbb{C}$, für welche die Reihe konvergiert und für diese z auch den Reihenwert.

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n z^n$

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^2 z^n$

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 2:
Der Konvergenzradius beider Potenzreihen ist 1, da

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^2} = 1$$

gilt.

Somit sind beide Reihen für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < 1$ konvergent und für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| > 1$ divergent. Für $|z| = 1$ bilden die Reihenglieder keine Nullfolge, daher sind in diesem Fall beide Reihen divergent.

Sei nun $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < 1$. Wir berechnen in beiden Fällen den Reihenwert.

(a) Es gilt mit dem Beispiel zum Cauchyprodukt aus der Vorlesung

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} z^n\right) \cdot \left(\sum_{k=0}^{\infty} z^k\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} z^{n-k} z^k = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) z^n.$$

Somit folgt aus der geometrischen Reihe die Formel $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (n+1) z^n = \frac{1}{(1-z)^2}$. Damit erhalten wir

$$\sum_{n=1}^{\infty} n z^n = z \sum_{n=1}^{\infty} n z^{n-1} = z \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) z^n = \frac{z}{(1-z)^2}.$$

(b) Aus der Vorlesung ist bekannt, dass

$$n^2 = 2\left(\sum_{k=0}^{n} k\right) - n$$

für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt Damit folgt

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} n^2 z^n &= \sum_{n=0}^{\infty}\left(2\left(\sum_{k=0}^{n} k\right) - n\right) z^n \\ &= 2\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}(z^{n-k})(kz^k) - \sum_{n=0}^{\infty} nz^n \\ &= 2\left(\sum_{n=0}^{\infty} z^n\right)\cdot\left(\sum_{k=0}^{\infty} kz^k\right) - \sum_{n=0}^{\infty} nz^n.\end{aligned}$$

Mit Teil (a) erhalten wir schließlich

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} n^2 z^n &= 2\cdot\frac{1}{1-z}\cdot\frac{z}{(1-z)^2} - \frac{z}{(1-z)^2} \\ &= \frac{z}{(1-z)^2}\cdot\left(\frac{2}{1-z} - 1\right) \\ &= \frac{z}{(1-z)^2}\cdot\frac{1+z}{1-z} \\ &= \frac{z(1+z)}{(1-z)^3}.\end{aligned}$$

Aufgabe 3 (Übung):
Bestimmen Sie für die folgenden Potenzreihen jeweils den Konvergenzradius und die Menge aller $z \in \mathbb{C}$ bzw. $x \in \mathbb{R}$, für welche die Potenzreihe konvergiert.

(a) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right)z^n$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} e^{n(1+(-1)^n)} z^{2n}$

(c) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)!}z^{2n+1}$

(d) $\sum_{n=0}^{\infty} n! z^n$

(e) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n+\sqrt{n}}$

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 3:

(a) Setze $(a_n) = \left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right)$. Es gilt

$$1 \le \sqrt[n]{|a_n|} \le \sqrt[n]{\sum_{k=1}^{n} 1} = \sqrt[n]{n} \xrightarrow{n\to\infty} 1.$$

Also ist $\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = 1$, und die Potenzreihe hat Konvergenzradius $R = \frac{1}{1} = 1$. Nach Abschnitt 7.13 des Skriptes ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ absolut konvergent für $|z| < 1$ und divergent für $|z| > 1$.

Für $|z| = 1$ ist

$$|a_n z^n| = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} \xrightarrow{n\to\infty} \infty$$

keine Nullfolge. Also divergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$.

(b) Die Reihe hat die Form $\sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ mit

$$a_n = \begin{cases} e^{4k} & \text{für } n = 4k, \\ 0 & \text{für } n = 4k+1, \\ 1 & \text{für } n = 4k+2, \\ 0 & \text{für } n = 4k+3 \end{cases}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Es ist $\sqrt[4k]{|a_{4k}|} = e$, $\sqrt[4k+1]{|a_{4k+1}|} = 0$, $\sqrt[4k+2]{|a_{4k+2}|} = 1$ und $\sqrt[4k+3]{|a_{4k+3}|} = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$ und folglich $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = e$.

Also ist $R = \frac{1}{e}$ der Konvergenzradius von $\sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$, und $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ ist absolut konvergent für $|z| < \frac{1}{e}$ und divergent für $|z| > \frac{1}{e}$.

Für $|z| = e^{-1}$ gilt für alle $k \in \mathbb{N}_0$

$$\left|a_{4k} z^{4k}\right| = e^{4k}|z|^{4k} = e^{4n}e^{-4n} = 1.$$

Also ist $(a_n z^n)_{n\in\mathbb{N}}$ keine Nullfolge und die Reihe $\sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ divergiert.

(c) Die Reihe hat die Form $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ mit

$$a_n = \begin{cases} 0 & \text{für } n = 2k, \\ \frac{1}{(2k+1)!} & \text{für } n = 2k+1 \end{cases}$$

für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Also ist

$$0 \leq \sqrt[n]{|a_n|} \leq \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} = \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} \cdot \frac{1}{n} \to \mathrm{e} \cdot 0 = 0$$

für $n \to \infty$. Also hat diese Potenzreihe Konvergenzradius ∞ und konvergiert für alle $z \in \mathbb{C}$.

Bemerkung: Diese Potenzreihe wird uns später noch begegnen. Die resultierende Funktion heißt *Sinus hyperbolicus*.

(d) Ähnlich wie in (c) sieht man

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!} = \infty.$$

also ist der Konvergenzradius $R = \frac{1}{\infty} = 0$. Nach Vorlesung ist die Potenzreihe genau für $z = 0$ konvergent (in diesem Fall ist sie natürlich absolut konvergent).

(e) Sei $(a_n) = \left(\frac{1}{n+\sqrt{n}}\right)$. Es gilt

$$\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \frac{n+1+\sqrt{n+1}}{n+\sqrt{n}} = \frac{1+\frac{1}{n}+\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}}{1+\sqrt{\frac{1}{n}}} \xrightarrow{n\to\infty} 1.$$

Also ist $R = 1$ der Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$. Die Potenzreihe ist für $|x| < 1$ (absolut) konvergent und für $|x| > 1$ divergent.

Es gilt $a_n \geq \frac{1}{n+n} = \frac{1}{2n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Folglich ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ divergent für $x = 1$ nach dem Minorantenkriterium.

Zuletzt ist (a_n) eine streng monoton fallende Nullfolge (warum?), und damit ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ konvergent für $x = -1$ nach dem Leibnizkriterium.

Aufgabe 4 (Tutorium):

Bestimmen Sie für die folgenden Potenzreihen jeweils den Konvergenzradius und die Menge aller $z \in \mathbb{C}$ bzw. $x \in \mathbb{R}$, für welche die Potenzreihe konvergiert.

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^n}\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}\right) z^{2n}$

(b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} 2^n z^{(n^2)}$

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}(z-2\mathrm{i})^n$

(d) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n+1}{(n-1)^2} x^n$

(e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} z^n$

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 4:

(a) Definiere $w \coloneqq \frac{z^2}{4}$ und $a_n = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}\right)$. Es gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^n} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}\right) z^{2n} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n w^n.$$

Ferner ist

$$1 \leq \sqrt[n]{|a_n|} \leq \sqrt[n]{\sum_{k=1}^{n} 1} = \sqrt[n]{n} \xrightarrow{n\to\infty} 1.$$

Also ist $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$. Nach Vorlesung ist der Konvergenzradius von $\sum_{n=0}^{\infty} a_n w^n$ gleich $R = \frac{1}{1} = 1$. Somit ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n w^n$ absolut konvergent für $|w| < 1$ bzw. $|z| < 2$ und divergent für $|w| > 1$ bzw. $|z| > 2$.

Für $|w| = 1$ ist

$$|a_n w^n| = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \geq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \xrightarrow{n\to\infty} \infty$$

keine Nullfolge. Also divergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ für $|z| = 2$.

(b) Die Reihe hat die Form $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ mit

$$a_n = \begin{cases} 2^m & \text{für } n = m^2, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Folglich ist

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \limsup_{m\to\infty} \sqrt[m^2]{|a_{m^2}|} = \limsup_{m\to\infty} \sqrt[m^2]{2^m} = \lim_{m\to\infty} \sqrt[m]{2} = 1.$$

Also ist der Konvergenzradius $R = \frac{1}{1} = 1$. Somit ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ absolut konvergent für $|z| < 1$ und divergent für $|z| > 1$.

Für $|z| = 1$ ist $\left|a_{n^2} z^{n^2}\right| = 2^n$ und damit $(a_n z^n)$ keine Nullfolge. Deshalb ist $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ divergent.

(c) Die Reihe hat die Form $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ mit $z_0 = 2\mathrm{i}$ und $a_n = \frac{1}{n^n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Es gilt

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Nach Vorlesung ist der Konvergenzradius $R = \frac{1}{0} = \infty$. Somit ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ (absolut) konvergent für alle $z \in \mathbb{C}$.

(d) Sei $(a_n)_{n\geq 2} = \left(\frac{2n+1}{(n-1)^2}\right)_{n\geq 2}$. Es gilt

$$\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \frac{2n+1}{(n-1)^2} \cdot \frac{(n+1-1)^2}{2(n+1)+1} = \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{n}\right)^2} \cdot \frac{1 + \frac{1}{2n}}{1 + \frac{3}{2n}} \xrightarrow{n\to\infty} 1.$$

Nach Vorlesung ist $R = 1$ der Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$. Somit ist die Potenzreihe also für $|x| < 1$ (absolut) konvergent und für $|x| > 1$ divergent.

Es gilt

$$a_n = \frac{2n+1}{(n-1)^2} \geq \frac{2n}{n^2} = \frac{2}{n}$$

für alle $n \geq 2$. Folglich ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ divergent für $x = 1$ nach dem Minorantenkriterium.

Für alle $n \geq 2$ gilt

$$a_n = \frac{2n+1}{(n-1)^2} = \frac{2(n-1)+3}{(n-1)^2} = \frac{2}{n-1} + \frac{3}{(n-1)^2} \geq \frac{2}{n} + \frac{3}{n^2} = \frac{2(n+1)+1}{n^2} = a_{n+1}.$$

Ferner ist

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{(n-1)^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}{\left(1-\frac{1}{n}\right)^2} = 0.$$

Also ist $\sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n$ konvergent für $x=-1$ nach dem Leibnizkriterium.

(e) Sei $(a_n) = \left(\frac{n}{\sqrt[n]{n!}}\right)$. Es gilt $1 \leq n! \leq n^n$ für jedes $n \in \mathbb{N}$. Folglich ist

$$1 = \sqrt[n]{\frac{n}{n}} = \sqrt[n]{\frac{n}{\sqrt[n]{n^n}}} \leq \underbrace{\sqrt[n]{\frac{n}{\sqrt[n]{n!}}}}_{=\sqrt[n]{|a_n|}} \leq \frac{\sqrt[n]{n}}{1} \xrightarrow{n\to\infty} 1.$$

Also ist $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$. Deshalb ist der Konvergenzradius $R = \frac{1}{1} = 1$, und $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ ist absolut konvergent für $|z| < 1$ und divergent für $|z| > 1$.

Für $|z| = 1$ ist

$$|a_n z^n| = \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} \to \mathrm{e}$$

und somit keine Nullfolge. Also divergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ für $|z| = 1$.

Aufgabe 5 (Übung):
Zeigen Sie mit Hilfe der Additionstheoreme die folgenden Formeln für alle $z, w \in \mathbb{C}$:

(a) $\sin(2z) = 2\sin(z)\cos(z)$

(b) $\cos(2z) = 1 - 2\sin^2(z) = 2\cos^2(z) - 1$

(c) $\sin(z) + \sin(w) = 2\sin\left(\frac{z+w}{2}\right)\cos\left(\frac{z-w}{2}\right)$

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 5:

(a) Das Additionstheorem $\sin(z+w) = \sin(z)\cos(w) + \cos(z)\sin(w)$ liefert für jedes $z \in \mathbb{C}$ die Identität

$$\sin(2z) = \sin(z+z) = \sin(z)\cos(z) + \cos(z)\sin(z) = 2\sin(z)\cos(z).$$

(b) Ebenso folgt aus $\cos(z+w) = \cos(z)\cos(w) - \sin(z)\sin(w)$ die Gleichung

$$\cos(2z) = \cos(z+z) = \cos(z)\cos(z) - \sin(z)\sin(z) = \cos^2(z) - \sin^2(z).$$

Aus der Formel $\cos^2(z) + \sin^2(z) = 1$ für jedes $z \in \mathbb{C}$ folgt somit sowohl

$$\cos^2(z) - \sin^2(z) = (1 - \sin^2(z)) - \sin^2(z) = 1 - 2\sin^2(z)$$

als auch

$$\cos^2(z) - \sin^2(z) = \cos^2(z) - (1 - \cos^2(z)) = 2\cos^2(z) - 1.$$

(c) Aus den Additionstheoremen folgt

$$\sin\left(\frac{z+w}{2}\right) = \sin\left(\frac{z}{2}\right)\cos\left(\frac{w}{2}\right) + \cos\left(\frac{z}{2}\right)\sin\left(\frac{w}{2}\right)$$

und

$$\begin{aligned}\cos\left(\frac{z\pm w}{2}\right) &= \cos\left(\frac{z}{2}\right)\cos\left(\pm\frac{w}{2}\right) - \sin\left(\frac{z}{2}\right)\sin\left(\pm\frac{w}{2}\right)\\ &= \cos\left(\frac{z}{2}\right)\cos\left(\frac{w}{2}\right) \mp \sin\left(\frac{z}{2}\right)\sin\left(\frac{w}{2}\right).\end{aligned}$$

Wir erhalten schließlich

$$2\sin\left(\frac{z+w}{2}\right)\cos\left(\frac{z-w}{2}\right)$$

$$
\begin{aligned}
&= 2\Big(\sin\left(\frac{z}{2}\right)\cos\left(\frac{w}{2}\right)+\cos\left(\frac{z}{2}\right)\sin\left(\frac{w}{2}\right)\Big)\Big(\cos\left(\frac{z}{2}\right)\cos\left(\frac{w}{2}\right)+\sin\left(\frac{z}{2}\right)\sin\left(\frac{w}{2}\right)\Big)\\
&= 2\sin\left(\frac{z}{2}\right)\cos\left(\frac{z}{2}\right)\cos^2\left(\frac{w}{2}\right)+2\sin\left(\frac{w}{2}\right)\cos\left(\frac{w}{2}\right)\sin^2\left(\frac{z}{2}\right)\\
&\quad+2\sin\left(\frac{w}{2}\right)\cos\left(\frac{w}{2}\right)\cos^2\left(\frac{z}{2}\right)+2\sin\left(\frac{z}{2}\right)\cos\left(\frac{z}{2}\right)\sin^2\left(\frac{w}{2}\right)\\
&= 2\sin\left(\frac{z}{2}\right)\cos\left(\frac{z}{2}\right)\Big(\sin^2\left(\frac{w}{2}\right)+\cos^2\left(\frac{w}{2}\right)\Big)\\
&\quad+2\sin\left(\frac{w}{2}\right)\cos\left(\frac{w}{2}\right)\Big(\sin^2\left(\frac{z}{2}\right)+\cos^2\left(\frac{z}{2}\right)\Big)\\
&= \sin(z)+\sin(w).
\end{aligned}
$$

Aufgabe 6 (Tutorium):
Untersuchen Sie jeweils, ob die Reihe konvergiert und bestimmen Sie ggf. den Reihenwert.

(a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(-\tfrac{1}{2}\right)^k\right)$

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}2^{-n-k}\right)$

(c) $\displaystyle 0{,}999\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}9\cdot 10^{-n}$

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2+(-1)^n}{3^n}$

(e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+1)!}$

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 6:
Wir beginnen mit der Beobachtung, dass $\sum_{k=n}^{\infty}q^k=\frac{q^n}{1-q}$ für $|q|<1$ gilt:

$$\sum_{k=n}^{\infty}q^k \overset{\substack{\text{subst.}\\ k=l+n}}{=} \sum_{l=0}^{\infty}q^{l+n}=q^n\sum_{l=0}^{\infty}q^l=q^n\frac{1}{1-q}$$

wobei wir die geometrische Reihe verwendet haben.

(a) Es gilt für die Reihe:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(-\tfrac{1}{2}\right)^k\right)\overset{\substack{\text{Binomische}\\ \text{Formel}}}{=}\sum_{n=0}^{\infty}\left(1-\tfrac{1}{2}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\tfrac{1}{2}\right)^n$$

Dies ist eine geometrische Reihe. Sie konvergiert nach Vorlesung und der Reihenwert ist gegeben durch $\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=2$.

(b) Es gilt mit der Formel für geometrische Reihen:

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}2^{-n-k}\right)&=\sum_{n=1}^{\infty}\left(2^{-n}\sum_{k=0}^{n}2^{-k}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(2^{-n}\cdot\frac{1-2^{-n-1}}{1-2^{-1}}\right)\\
&=\sum_{n=1}^{\infty}\left(2\cdot 2^{-n}-4^{-n}\right)=2\cdot\frac{2^{-1}}{1-2^{-1}}-\frac{4^{-1}}{1-4^{-1}}=\frac{2}{3}.
\end{aligned}
$$

(c) Es gilt (geometrische Reihe):

$$\sum_{n=1}^{\infty}9\cdot 10^{-n}=9\sum_{n=1}^{\infty}10^{-n}=9\cdot\frac{10^{-1}}{1-10^{-1}}=1.$$

(d) Wir schreiben

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2+(-1)^n}{3^n}=\sum_{n=1}^{\infty}2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^n+\left(\frac{-1}{3}\right)^n$$

Bei dem Term auf der rechten Seite handelt es sich um eine Summe von geometrischen Reihen, die nach Vorlesung konvergieren. Somit erhalten wir für den Reihenwert nach Vorlesung:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2+(-1)^n}{3^n} = 2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{-1}{3}\right)^n = 2 \cdot \frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}} + \frac{\frac{-1}{3}}{1-\frac{-1}{3}} = 2 \cdot \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{4} = \tfrac{3}{4}.$$

(e) Es gilt für $N \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{n}{(n+1)!} = \sum_{n=1}^{N} \frac{n+1-1}{(n+1)!} = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!} \overset{\text{Teleskopsumme}}{=} \frac{1}{1!} - \frac{1}{(N+1)!}.$$

Für $N \to \infty$ konvergiert $\frac{1}{(N+1)!}$ gegen 0, und somit erhalten wir den Reihenwert:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)!} = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \frac{n}{(n+1)!} = \frac{1}{1!} - 0.$$