

7. Übungsblatt

Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Physik

Wintersemester 2023/24

7. Dezember 2023

Behandelt am 14. Dezember 2023

Aufgabe 1 (Übung):

Seien U_1, U_2 Untervektorräume eines $\mathbb{K}$ -Vektorraums W .

- (a) Sei $U_1 \cup U_2$ ein Untervektorraum von W . Zeigen Sie, dass dann $U_1 \subseteq U_2$ oder $U_2 \subseteq U_1$.
- (b) Zeigen Sie, dass $U_1 \cap U_2$ ein Untervektorraum von W ist.
- (c) Zeigen Sie, dass $\{u_1 + u_2 : u_1 \in U_1 \text{ und } u_2 \in U_2\}$ ein Untervektorraum von W ist.

Aufgabe 2 (Tutorium):

Welche der Mengen

- (a) $\{f \in \mathbb{R}^{[-1,1]} : f \text{ hat mindestens eine Nullstelle}\}$,
- (b) $\{(a_n) \in \mathbb{C} : \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a\}$ mit einem festen $a \in \mathbb{R}$,
- (c) $\{f \in \mathbb{R}^{[-1,1]} : f(0) = 0\}$

sind Untervektorräume des $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ bzw. des $\mathbb{R}^{[-1,1]}$?

Aufgabe 3 (Übung):

Berechnen Sie, falls existent, die folgenden Grenzwerte.

- (a) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 9x^2 + 16x - 4}{3x^3 - 10x^2 + 9x - 2}$,
- (b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{8+x} - 2}{x}$,
- (c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - 1}{x^2}$.

Aufgabe 4 (Tutorium):

Berechnen Sie, falls existent, die folgenden Grenzwerte.

- (a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{ax} - 1 - ax}{x^2}$, $a > 0$,
- (b) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x} \left(\frac{1}{2-x} - \frac{12}{8-x^3} \right)$,
- (c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{8x^3 + 2x^2 + 1}{2x^3 + 7x}$,
- (d) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 - 3x - 2}{x^2 - 2 + 1}$.

Aufgabe 5 (Übung):

Untersuchen Sie die folgenden Funktionenfolgen oder Funktionenreihen auf punktweise Konvergenz und gleichmäßige Konvergenz:

- (a) Die Funktionenfolge (f_n) mit $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ und $f_n(x) = \frac{nx^2}{1+n^2x^4}$ für alle $n \in \mathbb{N}$
- (b) Die Funktionenreihe $\sum_{n=0}^{\infty} g_n$ mit $g_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ und $g_n(x) = e^{-n(1+x+x^2)}$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$
- (c) Die Funktionenfolge (f_n) mit $f_n : [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ und $f_n(x) = \frac{1}{1+nx}$ für alle $n \in \mathbb{N}$, wobei $0 \leq a < 1$ fest ist
- (d) Die Funktionenfolge (f_n) mit $f_n : [a, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ und $f_n(x) = \sqrt[n]{n^2x}$ für alle $n \in \mathbb{N}$, wobei $0 \leq a < 1$ fest ist

Aufgabe 6 (Tutorium):

Bestimmen Sie jeweils eine Konstante y_0 so, dass die Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ auf ihrem ganzen Definitionsbereich D stetig ist.

- (a) $D = [0, 1]$, $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-1} + \frac{3}{(x^2-4)(x-1)} & \text{für } x \in D \setminus \{1\}, \\ y_0 & \text{für } x = 1, \end{cases}$
- (b) $D = (0, \infty)$, $f(x) = \begin{cases} \frac{(\sqrt{x})^n - 1}{x-1} & \text{für } x \in D \setminus \{1\}, \\ y_0 & \text{für } x = 1, \end{cases}$ für ein festes $n \in \mathbb{N}$.
- (c) $D = \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x)-x}{x^3} & \text{für } x \in D \setminus \{0\}, \\ y_0 & \text{für } x = 0. \end{cases}$
- (d) $D = \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \frac{e^x - e^{-x}}{x} & \text{für } x \in D \setminus \{0\} \\ y_0 & \text{für } x = 0. \end{cases}$

Temporary page!

L^AT_EX was unable to guess the total number of pages correctly. As there was some unprocessed data that should have been added to the final page this extra page has been added to receive it.

If you rerun the document (without altering it) this surplus page will go away, because L^AT_EX now knows how many pages to expect for this document.