Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Analysis
Priv.-Doz. Dr. Gerd Herzog
M.Sc. Niklas Knobel
M.Sc. Sebastian Ohrem

Lösungsvorschlag zum 7. Übungsblatt

Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Physik

Wintersemester 2023/24

14. Dezember 2023

Aufgabe 1 (Übung):
Seien U_1, U_2 Untervektorräume eines $\mathbb{K}$-Vektorraums W.

(a) Sei $U_1 \cup U_2$ ein Untervektorraum von W. Zeigen Sie, dass dann $U_1 \subseteq U_2$ oder $U_2 \subseteq U_1$.

(b) Zeigen Sie, dass $U_1 \cap U_2$ ein Untervektorraum von W ist.

(c) Zeigen sie, dass $\{u_1 + u_2 : \; u_1 \in U_1 \text{ und } u_2 \in U_2\}$ ein Untervektorraum von W ist.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 1:

(a) Wir beweisen die Behauptung mit einem Widerspruch. Angenommen es existieren $u_1 \in U_1 \setminus U_2$ und $u_2 \in U_2 \setminus U_1$. Da $U_1 \cup U_2$ ein Untervektorraum ist folgt mit dem Untervektorraumkriterium $u_1 + u_2 \in U_1 \cup U_2$ und somit $u_1 + u_2 \in U_1$ oder $u_1 + u_2 \in U_2$. Da U_1 und U_2 Untervektorräume sind folgt $u_2 \in U_1$ oder $u_1 \in U_2$ was ein Widerspruch ist. Damit ist $U_1 \setminus U_2 = \emptyset$ oder $U_2 \setminus U_1 = \emptyset$.

(b) Wir beweisen die Behauptung mit dem Untervektorraumkriterium. Es gilt $0 \in U_1 \cap U_2$ und damit $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$. Seien $u, v \in U_1 \cap U_2$ und $\alpha \in \mathbb{K}$. Für $i \in \{1, 2\}$ gilt dann $u, v \in U_i$. Da U_i ein Untervektorraum ist folgt $u + v \in U_i$ und $\alpha u \in U_i$. Damit folgt $u + v \in U_1 \cap U_2$ und $\alpha u \in U_1 \cap U_2$.

(c) Wir schreiben $A = \{u_1 + u_2 : \; u_1 \in U_1 \text{ und } u_2 \in U_2\}$. Da $0 \in U_1, U_2$ folgt $0 \in A$. Seien $v, u \in A$ und $\alpha \in \mathbb{K}$, dann existieren $v_1, u_1 \in U_1$ und $v_2, u_2 \in U_2$ sodass $u = u_1 + u_2$ und $v = v_1 + v_2$. Mit dem Unterraumkriterium folgt $u_1 + v_1 \in U_1$, $u_2 + v_2 \in U_2$, $\alpha u_1 \in U_1$ und $\alpha u_2 \in U_2$. Damit folgt $u + v = u_1 + v_1 + u_2 + v_2 \in A$ und $\alpha u = \alpha u_1 + \alpha u_2 \in A$.

Aufgabe 2 (Tutorium):
Welche der Mengen

(a) $\{f \in \mathbb{R}^{[-1,1]} : \; f \text{ hat mindestens eine Nullstelle}\}$,

(b) $\{(a_n) \in \mathbb{C} : \; \lim_{n\to\infty} a_n = a\}$ mit einem festen $a \in \mathbb{R}$,

(c) $\{f \in \mathbb{R}^{[-1,1]} : \; f(0) = 0\}$

sind Untervektorräume des $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ bzw. des $\mathbb{R}^{[-1,1]}$?

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 2:

(a) Sei $U := \big\{f \in \mathbb{R}^{[-1,1]} : f \text{ hat mindestens eine Nullstelle}\big\}$ und $f, g \in \mathbb{R}^{[-1,1]}$ definiert durch

$$f(x) = 1 + x, \quad g(x) = -x$$

für alle $x \in [-1, 1]$. Wegen $f(-1) = g(0) = 0$, ist $f, g \in U$. Aber $f + g \equiv 1$, d.h. für alle $x \in [-1, 1]$ gilt

$$(f + g)(x) = 1 \neq 0.$$

Also $f + g \notin U$. Nach dem Untervektorraumkriterium (Satz im Abschnitt 8.3 des Skriptes) ist U kein Untervektorraum von $\mathbb{R}^{[-1,1]}$.

(b) Sei $V := \{(a_n) \in c\colon \lim_{n\to\infty} a_n = a\}$. Wir verwenden das Untervektorraumkriterium (Satz im Abschnitt 8.3 des Skriptes), um zu überprüfen, ob V ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ ist.

- $0 \in V$: Wegen $0 = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, ist $0 \in V \Leftrightarrow a = 0$. Sei also im Folgenden $a = 0$.
- Seien (a_n), $(b_n) \in V$ und $\alpha \in \mathbb{R}$. Zu zeigen ist $(a_n) + (b_n) \in V$ und $\alpha(a_n) \in V$. Wegen

$$\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n = 0 + 0 = 0 = a$$

und

$$\lim_{n\to\infty} \alpha a_n = \alpha \lim_{n\to\infty} a_n = \alpha \cdot 0 = 0 = a$$

ist in der Tat $(a_n) + (b_n) \in V$ und $\alpha(a_n) \in V$.

Also ist V genau für $a = 0$ ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

(c) Sei $W := \{f \in \mathbb{R}^{[-1,1]} : f(0) = 0\}$. Wir verwenden das Untervektorraumkriterium (Satz im Abschnitt 8.3 des Skriptes), um zu überprüfen, ob W ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^{[-1,1]}$ ist.

- $0 \in W$: Wegen $0 = (f : [-1, 1] \to \mathbb{R},\ x \mapsto 0)$ und damit $f(0) = 0$, ist $0 \in W$.
- Seien $f, g \in W$ und $\alpha \in \mathbb{R}$. Zu zeigen ist $f + g \in W$ und $\alpha f \in W$: Wegen

$$(f + g)(0) = f(0) + g(0) = 0 + 0 = 0$$

und

$$(\alpha f)(0) = \alpha f(0) = \alpha \cdot 0 = 0$$

ist in der Tat $f + g \in W$ und $\alpha f \in W$.

Aufgabe 3 (Übung):
Berechnen Sie, falls existent, die folgenden Grenzwerte.

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{x^3 - 9x^2 + 16x - 4}{3x^3 - 10x^2 + 9x - 2}$,

(b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{8 + x} - 2}{x}$,

(c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2} - 1}{x^2}$.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 3:

(a) Zähler und Nenner haben 2 als Nullstelle. Polynomdivision liefert

$$x^3 - 9x^2 + 16x - 4 = (x - 2)(x^2 - 7x + 2),$$
$$3x^3 - 10x^2 + 9x - 2 = (x - 2)(3x^2 - 4x + 1).$$

Sofern die Ausdrücke definiert sind, gilt also

$$\frac{x^3 - 9x^2 + 16x - 4}{3x^3 - 10x^2 + 9x - 2} = \frac{(x - 2)(x^2 - 7x + 2)}{(x - 2)(3x^2 - 4x + 1)} = \frac{x^2 - 7x + 2}{3x^2 - 4x + 1}.$$

Weiter ist 2 keine Nullstelle von $3x^2 - 4x + 1$. Wir schließen, dass der gesuchte Grenzwert existiert und durch

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^3 - 9x^2 + 16x - 4}{3x^3 - 10x^2 + 9x - 2} = \lim_{x\to 2} \frac{x^2 - 7x + 2}{3x^2 - 4x + 1} = -\frac{8}{5}$$

gegeben ist.

(b) Wir setzen zur Abkürzung $a := \sqrt[3]{8 + x}$ und $b := 2$ und erhalten die Darstellung

$$\sqrt[3]{8 + x} - 2 = a - b = \frac{(a - b)(a^2 + ab + b^2)}{a^2 + ab + b^2} = \frac{a^3 - b^3}{a^2 + ab + b^2}$$
$$= \frac{x}{\sqrt[3]{8 + x}^2 + 2\sqrt[3]{8 + x} + 4}.$$

Folglich erhalten wir

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{8+x}-2}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt[3]{8+x}^2 + 2\sqrt[3]{8+x}+4} = \frac{1}{\sqrt[3]{8}^2 + 2\sqrt[3]{8}+4} = \frac{1}{12}.$$

(c) Wir nutzen nutzen die Exponentialreihe

$$e^{x^2}-1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n!} - 1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n!} \overset{\text{Index-Shift}}{=} x^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(n+1)!}.$$

Damit erhalten wir

$$\frac{e^{x^2}-1}{x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(n+1)!}.$$

Da $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(n+1)!}$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $R=\infty$ ist folgt

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2}-1}{x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{0^{2n}}{(n+1)!} = 1.$$

Aufgabe 4 (Tutorium):
Berechnen Sie, falls existent, die folgenden Grenzwerte.

(a) $\lim_{x\to 0} \frac{e^{ax}-1-ax}{x^2}$, $a>0$,

(b) $\lim_{x\to 2} \frac{1}{x}\left(\frac{1}{2-x} - \frac{12}{8-x^3}\right)$,

(c) $\lim_{x\to -\infty} \frac{8x^3+2x^2+1}{2x^3+7x}$,

(d) $\lim_{x\to -1} \frac{x^3-3x-2}{x^2-2+1}$.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 4:

(a) Wir nutzen die Exponentialreihe

$$e^{ax}-1-ax = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ax)^n}{n!} - 1 - ax = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(ax)^n}{n!} \overset{\text{Index-Shift}}{=} (ax)^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ax)^n}{(n+2)!}.$$

Damit erhalten wir

$$\frac{e^{ax}-1-ax}{x^2} = a^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ax)^n}{(n+2)!}.$$

Da $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ax)^n}{(n+2)!}$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $R=\infty$ ist folgt

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{ax}-1-ax}{x^2} = a^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a0)^n}{(n+2)!} = \frac{a^2}{2}.$$

(b) Da $x = 2$ eine Nullstelle des Polynoms $8 - x^3$ ist, lässt es sich durch den Linearfaktor $(x-2)$ teilen (Polynomdivision). Wir erhalten

$$8 - x^3 = (x-2) \cdot (-x^2 - 2x - 4).$$

Damit gilt

$$\begin{aligned}\frac{1}{x}\left(\frac{1}{2-x} - \frac{12}{8-x^3}\right) &= \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{2-x} \cdot \left(1 - \frac{12}{x^2+2x+4}\right) \\ &= \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{2-x} \cdot \frac{x^2+2x+4-12}{x^2+2x+4} = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{2-x} \cdot \frac{x^2+2x-8}{x^2+2x+4}.\end{aligned}$$

Weitere Polynomdivision liefert $x^2 + 2x - 8 = (x-2) \cdot (x+4)$ und folglich

$$\frac{1}{x}\left(\frac{1}{2-x} - \frac{12}{8-x^3}\right) = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{2-x} \cdot \frac{x^2+2x-8}{x^2+2x+4} = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{2-x} \cdot \frac{(2-x)(-x-4)}{x^2+2x+4} = -\frac{1}{x} \cdot \frac{(x+4)}{x^2+2x+4}.$$

Deshalb gilt $\lim_{x\to 2} \frac{1}{x}\left(\frac{1}{2-x} - \frac{12}{8-x^3}\right) = \lim_{x\to 2} -\frac{1}{x} \cdot \frac{(x+4)}{x^2+2x+4} = -\frac{1}{4}$.

(c) Mit dem gleichen Standardtrick wie bei Folgen erhalten wir, dass dieser Grenzwert existiert und dass gilt

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{8x^3+2x^2+1}{2x^3+7x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{8+2x^{-1}+x^{-3}}{2+7x^{-2}} = \frac{8+0+0}{2+0} = 4.$$

(d) Da $x = -1$ eine Nullstelle von beiden Polynomen ist liefert eine Polynomdivision

$$\begin{aligned}x^2 - 2 + 1 &= (x+1)(x-1) \\ x^3 - 3x - 2 &= (x+1)(x^2 - x - 2)\end{aligned}$$

damit folgt

$$\frac{x^3-3x-2}{x^2-2+1} = \frac{(x+1)(x^2-x-2)}{(x+1)(x-1)} = \frac{x^2-x-2}{x-1}.$$

Damit gilt für den Limit

$$\lim_{x\to-1} \frac{x^3-3x-2}{x^2-2+1} = \frac{1+1-2}{-1-1} = 0.$$

Aufgabe 5 (Übung):
Untersuchen Sie die folgenden Funktionenfolgen oder Funktionenreihen auf punktweise Konvergenz und gleichmäßige Konvergenz:

(a) Die Funktionenfolge (f_n) mit $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $f_n(x) = \frac{nx^2}{1+n^2x^4}$ für alle $n \in \mathbb{N}$

(b) Die Funktionenreihe $\sum_{n=0}^{\infty} g_n$ mit $g_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $g_n(x) = e^{-n(1+x+x^2)}$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$

(c) Die Funktionenfolge (f_n) mit $f_n : [a, \infty) \to \mathbb{R}$ und $f_n(x) = \frac{1}{1+nx}$ für alle $n \in \mathbb{N}$, wobei $0 \le a < 1$ fest ist

(d) Die Funktionenfolge (f_n) mit $f_n : [a, 1] \to \mathbb{R}$ und $f_n(x) = \sqrt[n]{n^2x}$ für alle $n \in \mathbb{N}$, wobei $0 \le a < 1$ fest ist

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 5:

(a) Sei $x \in \mathbb{R}$ fest. Für $x = 0$ ist $f_n(x) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und deshalb $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$. Ist $x \neq 0$, so gilt

$$|f_n(x)| = \left|\frac{nx^2}{1+n^2x^4}\right| = \frac{nx^2}{1+n^2x^4} \le \frac{nx^2}{n^2x^4} = \frac{1}{nx^2} \to 0 \qquad (n \to \infty).$$

Also ist $f_n \to 0$ punktweise für $n \to \infty$.
Sei $\tilde{f}(y) = \frac{y}{1+y^2}$ für alle $y \in \mathbb{R}$. Wir beobachten, dass $f_n(x) = \tilde{f}(nx^2)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $x \in \mathbb{R}$ gilt. Definiere $x_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Es gilt

$$\|f_n\|_\infty = \sup_{x\in\mathbb{R}} \frac{nx^2}{1+n^2x^4} \ge \frac{nx_n^2}{1+n^2x_n^4} = \tilde{f}(1) = \frac{1}{2}.$$

Also $\|f_n\|_\infty \not\to 0$, die Konvergenz $f_n \to 0$ ist also nicht gleichmäßig.

(b) Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$1 + x + x^2 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4}.$$

Da die geometrische Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{e^{\frac{3}{4}}}\right)^n$$

konvergent ist und wegen

$$|g_n(x)| = e^{-n(1+x+x^2)} \leq e^{-\frac{3n}{4}} = \left(\frac{1}{e^{\frac{3}{4}}}\right)^n \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}$$

ist die Funktionenreihe $\sum_{n=0}^{\infty} g_n$ gleichmäßig konvergent nach (b) im Abschnitt 9.9 des Skriptes (Kriterium für gleichmäßige Konvergenz).

(c) Sei zunächst $0 < a < 1$. Dann gilt für alle $x \in [a, \infty)$

$$|f_n(x)| = \frac{1}{1+nx} \leq \frac{1}{1+na} \leq \frac{1}{na} =: \alpha_n \to 0$$

für $n \to \infty$. Nach (a) im Abschnitt 9.9 des Skriptes (Kriterium für gleichmäßige Konvergenz) ist die Funktionenfolge f_n gleichmäßig konvergent gegen die Nullfunktion.

Sei nun $a = 0$. Für $x = 0$ gilt $f_n(x) = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und deshalb $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 1$. Für $x \neq 0$ ist

$$f_n(x) = \frac{1}{1+nx} \to 0 \qquad (n \to \infty).$$

Deshalb konvergiert $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen h, wobei

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x = 0, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

ist. Weil f nicht stetig bei 0 ist, kann die Konvergenz nach (d) im Abschnitt 9.9 des Skriptes (Kriterium für gleichmäßige Konvergenz) nicht gleichmäßig sein.

(d) Sei zunächst $0 < a < 1$ und $x \in [a, 1]$ fest. Dann gilt

$$f_n(x) = \sqrt[n]{n^2 x} \to 1 \qquad (n \to \infty).$$

Also ist $f_n \to 1$ punktweise für $n \to \infty$.

Da $a > 0$ folgt für n groß genug $1 \leq n^2 a$ und damit gilt für alle $x \in [a, 1]$, dass $1 \leq n^2 a \leq n^2 x$. Damit folgt $1 \leq \sqrt[n]{n^2 x}$ und somit

$$|f_n(x) - 1| \quad = \quad \left|\sqrt[n]{n^2 x} - 1\right| = \sqrt[n]{n^2 x} - 1 \overset{x \leq 1}{\leq} \sqrt[n]{n^2} - 1 \to 0$$

für $n \to \infty$, ist die Funktionenfolge f_n gleichmäßig konvergent nach (a) im Abschnitt 9.9 des Skriptes (Kriterium für gleichmäßige Konvergenz).

Sei nun $a = 0$. Für $x = 0$ gilt $f_n(x) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und deshalb $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$. Für $x \neq 0$ gilt, mit der gleichen Rechnung wie oben, $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 1$. Deshalb konvergiert $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ punktweise gegen f, wobei

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x = 0 \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$$

für alle $x \in [0, 1]$. Weil f nicht stetig bei 0 ist, kann die Konvergenz nach (d) im Abschnitt 9.9 der Vorlesung (Kriterium für gleichmäßige Konvergenz) nicht gleichmäßig sein.

Aufgabe 6 (Tutorium):
Bestimmen Sie jeweils eine Konstante y_0 so, dass die Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ auf ihrem ganzen Definitionsbereich D stetig ist.

(a) $D = [0,1]$, $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-1} + \frac{3}{(x^2-4)(x-1)} & \text{für } x \in D \setminus \{1\}, \\ y_0 & \text{für } x = 1, \end{cases}$

(b) $D = (0,\infty)$, $f(x) = \begin{cases} \frac{(\sqrt{x})^n - 1}{x-1} & \text{für } x \in D \setminus \{1\}, \\ y_0 & \text{für } x = 1, \end{cases}$ für ein festes $n \in \mathbb{N}$.

(c) $D = \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x)-x}{x^3} & \text{für } x \in D \setminus \{0\}, \\ y_0 & \text{für } x = 0. \end{cases}$

(d) $D = \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \frac{e^x - e^{-x}}{x} & \text{für } x \in D \setminus \{0\} \\ y_0 & \text{für } x = 0. \end{cases}$

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 6:

(a) Mit Satz 9.3 ist die Funktion f ist in allen $x \in D \setminus \{1\}$ stetig, daher reicht es $f(1) = y_0$ so zu wählen, dass $\lim_{x\to 1} f(x) = y_0$ gilt. Für alle $x \in D \setminus \{1\}$ gilt

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{x-1} + \frac{3}{(x^2-4)(x-1)} = \frac{1}{x-1} \cdot \left(1 + \frac{3}{(x^2-4)}\right) = \frac{1}{x-1} \cdot \frac{(x^2-4)+3}{(x^2-4)} \\ &= \frac{1}{x-1} \cdot \frac{x^2-1}{(x^2-4)} = \frac{1}{x-1} \cdot \frac{(x-1)(x+1)}{(x^2-4)} = \frac{x+1}{(x^2-4)}. \end{aligned}$$

Folglich muss $y_0 := \lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} \frac{x+1}{(x^2-4)} = -\frac{2}{3}$ gewählt werden.

(b) Mit Satz 9.3 ist die Funktion f ist in allen $x \in D \setminus \{1\}$ stetig, daher reicht es $f(1) = y_0$ so zu wählen, dass $\lim_{x\to 1} f(x) = y_0$ gilt. Sei $x \in D \setminus \{1\}$ und wir definieren $y := \sqrt{x}$. Dann gilt mit der dritten binomischen Formel (siehe (1) im Abschnitt 4.11 des Skriptes)

$$f(x) = \frac{(\sqrt{x})^n - 1}{x-1} = \frac{y^n - 1^n}{y^2 - 1^2} = \frac{(y-1)\sum_{k=0}^{n-1} y^k}{(y-1)(1+y)} = \frac{\sum_{k=0}^{n-1} y^k}{(1+y)}.$$

Folglich muss

$$y_0 := \lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} \frac{\sum_{k=0}^{n-1} (\sqrt{x})^k}{1+\sqrt{x}} = \frac{\sum_{k=0}^{n-1} 1}{1+1} = \frac{n}{2}$$

gewählt werden.

(c) Mit Satz 9.3 ist die Funktion f ist in allen $x \in D \setminus \{1\}$ stetig, daher reicht es $f(0) = y_0$ so zu wählen, dass $\lim_{x\to 0} f(x) = y_0$ gilt. Für alle $x \in D \setminus \{0\}$ gilt

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\sin(x) - x}{x^3} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} - x}{x^3} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n-2} \\ &\overset{\text{Index-Shift}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+3)!} x^{2n} \end{aligned}$$

Da die Potenzrihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+3)!} x^{2n}$ den Konvergenzradius $R = \infty$ hat, definiert sie nach Abschnitt 9.9 des Skriptes auf ganz $\mathbb{R}$ eine stetige Funktionen $x \mapsto f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+3)!} x^{2n}$. Folglich muss

$$y_0 := \lim_{x\to 0} f(x) = f(0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+3)!} 0^{2n} = \sum_{n=0}^{0} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+3)!} x^{2n} = -\frac{1}{6}$$

gewählt werden.

(d) Mit Satz 9.3 ist die Funktion f ist in allen $x \in D \setminus \{1\}$ stetig, daher reicht es $f(0) = y_0$ so zu wählen, dass $\lim_{x\to 0} f(x) = y_0$ gilt. Für alle $x \in D \setminus \{0\}$ gilt:

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{e^x - e^{-x}}{x} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^n}{x} = \frac{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^n}{x} \\
&\overset{\text{Index-Shift}}{=} \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)!} x^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)!} x^{n+1}}{x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)!} x^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)!} x^n
\end{aligned}
$$

Da $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{(n+1)!} x^n$ und $\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{(n+1)!} x^n$ alle den Konvergenzradius $R = \infty$ haben, definieren sie nach Abschnitt 9.9 des Skriptes auf ganz $\mathbb{R}$ stetige Funktionen $x \mapsto f_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)!} x^n$ und $x \mapsto f_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)!} x^n$. Folglich muss

$$
y_0 := \lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} f_1(x) + f_2(x) = f_1(0) + f_2(0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)!} 0^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)!} 0^n = 1
$$

gewählt werden.