

8. Übungsblatt

Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Physik

Wintersemester 2023/24

14. Dezember 2023

Behandelt am 21. Dezember 2023

Aufgabe 1 (Übung):

Die Funktion $f: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ist gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}, & \text{für } x \in [-1, 1] \setminus \{0\}, \\ 0, & \text{für } x = 0. \end{cases}$$

- (a) Zeigen Sie, dass f stetig ist.
- (b) Bestimmen Sie den Wertebereich $f([-1, 1])$ von f .
- (c) Zeigen Sie, dass f eine Umkehrfunktion $f^{-1}: f([-1, 1]) \rightarrow [-1, 1]$ besitzt. Berechnen Sie f^{-1} .
- (d) Zeigen Sie, dass f^{-1} und f streng monoton wachsende Funktionen sind.

Aufgabe 2 (Tutorium):

- (a) Sei $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ ein abgeschlossenes Intervall und seien $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetige Funktionen mit $f(a) > g(a)$ und $f(b) < g(b)$. Zeigen Sie, dass ein $x_0 \in (a, b)$ existiert mit $f(x_0) = g(x_0)$.
- (b) Zeigen Sie die Existenz einer Lösung $x_0 \geq 0$ von

$$\frac{1}{1+x^2} = \sqrt{x}.$$

Aufgabe 3 (Übung):

Sei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0.$$

Zeigen Sie, dass es ein $x_M \in \mathbb{R}$ gibt, mit

$$\forall x \in \mathbb{R}: |f(x)| \leq |f(x_M)|.$$

Aufgabe 4 (Tutorium):

Zeigen Sie die folgenden Identitäten.

- (a) Zeigen Sie $\cos(\frac{\pi}{6}) = \sin(\frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ und $\cos(\frac{\pi}{3}) = \sin(\frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2}$.
- (b) $\tan(x+y) = \frac{\tan(x)+\tan(y)}{1-\tan(x)\tan(y)}$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$ mit $x, y, x+y \notin \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}$.
- (c) $\arctan(x) + \arctan(y) = \arctan\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$ mit $|\arctan(x) + \arctan(y)| < \frac{\pi}{2}$.
- (d) $(\cosh(x) + \sinh(x))^n = \cosh(nx) + \sinh(nx)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $x \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 5 (Tutorium):

- (a) Zeigen Sie, dass für $\varphi, \psi \in \mathbb{R}$ der Abstand der Punkte $e^{i\varphi}$ und $e^{i\psi}$ durch

$$|e^{i\varphi} - e^{i\psi}| = 2 \left| \sin \left(\frac{\varphi - \psi}{2} \right) \right|$$

gegeben ist.

- (b) Sei $2 \leq n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass die n -ten Einheitswurzeln — also Lösungen der Gleichung $z^n = 1$ für $z \in \mathbb{C}$ — ein n -Eck mit Umfang $L_n = 2n \sin\left(\frac{\pi}{n}\right)$ bilden.

- (c) Zeigen Sie

$$\lim_{n \rightarrow \infty} L_n = 2\pi.$$

- (d) Interpretieren Sie die letzte Gleichung und zeichnen Sie für $n = 6$ ein Bild.

Aufgabe 6 (Übung):

Sei $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{R}$ abgeschlossen, $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und $N := \{x \in D : f(x) = 0\}$. Zeigen Sie die folgenden Aussagen.

- (a) N ist abgeschlossen.
- (b) Ist N nach unten beschränkt und nichtleer, so hat N ein Minimum.