Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Analysis
Priv.-Doz. Dr. Gerd Herzog
M.Sc. Niklas Knobel
M.Sc. Sebastian Ohrem

Lösungsvorschlag zum 8. Übungsblatt

Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Physik

Wintersemester 2023/24

21. Dezember 2023

Aufgabe 1 (Übung):
Die Funktion $f\colon [-1,1] \to \mathbb{R}$ ist gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}, & \text{für } x \in [-1,1] \setminus \{0\}, \\ 0, & \text{für } x = 0. \end{cases}$$

(a) Zeigen Sie, dass f stetig ist.

(b) Bestimmen Sie den Wertebereich $f([-1,1])$ von f.

(c) Zeigen Sie, dass f eine Umkehrfunktion $f^{-1}: f([-1,1]) \to [-1,1]$ besitzt. Berechnen Sie f^{-1}.

(d) Zeigen Sie, dass f^{-1} und f streng monoton wachsende Funktionen sind.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 1:

(a) Als Komposition stetiger Funktionen ist f auf $[-1,1] \setminus \{0\}$ stetig. Für $x \in [-1,1] \setminus \{0\}$ gilt

$$f(x) = \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x} \cdot \frac{1+\sqrt{1-x^2}}{1+\sqrt{1-x^2}} = \frac{1-(1-x^2)}{x(1+\sqrt{1-x^2})} = \frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}}.$$

Demnach gilt $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0 = f(0)$, und damit ist f auch stetig in 0.

(b) Wir zeigen zunächst $|f(x)| \leq 1$ für alle $x \in [-1,1]$. Für $x \in [-1,1] \setminus \{0\}$ gilt mit Teil (a)

$$|f(x)| = \frac{|x|}{1+\sqrt{1-x^2}} \leq |x| \leq 1.$$

Wegen $f(0) = 0$ ist $|f(x)| \leq 1$ für alle $x \in [-1,1]$ bewiesen. Hieraus folgt $f([-1,1]) \subseteq [-1,1]$.

Nun zeigen wir $[-1,1] \subseteq f([-1,1])$. Sei dazu $y_0 \in [-1,1]$. Dann liegt y_0 zwischen $f(-1) = -1$ und $f(1) = 1$. Aufgrund der Stetigkeit von f existiert nach dem Zwischenwertsatz ein $x_0 \in [-1,1]$ mit $y_0 = f(x_0) \in \{f(x) \colon x \in [-1,1]\} = f([-1,1])$. Da $y_0 \in [-1,1]$ beliebig war, folgt $[-1,1] \subseteq f([-1,1])$. Insgesamt ergibt sich $f([-1,1]) = [-1,1]$.

(c) Um die Existenz der Umkehrfunktion von f nachzuweisen, verwenden wir folgendes Resultat: Seien X und Y Mengen und $f\colon X \to Y$ eine Funktion. Gelingt es, die Gleichung $y = f(x)$ durch Äquivalenzumformungen (!) in die Form $x = g(y)$ zu bringen (wobei $x \in X$, $y \in Y$ und $g\colon Y \to X$), dann ist f bijektiv und die Umkehrfunktion von f lautet g.

Für $x \in [-1,1] \setminus \{0\}$ gilt $y = f(x) \in [-1,1]$ und damit

$$\begin{aligned} & y = f(x) \\ \iff\ & y = \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x} \\ \iff\ & 1 - xy = \sqrt{1-x^2} \\ \overset{1-xy\geq 0}{\iff}\ & 1 - 2xy + x^2y^2 = 1 - x^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\iff x^2(1+y^2) = 2xy \\
&\overset{x\neq 0}{\iff} x(1+y^2) = 2y \\
&\iff x = \frac{2y}{1+y^2}.
\end{aligned}$$

Für $x = 0$ folgt

$$y = f(0) = 0 \iff 0 = \frac{2y}{1+y^2}.$$

Damit folgt, dass f eine Umkehrfunktion besitzt, die durch

$$f^{-1}\colon [-1,1] \to [-1,1], \quad y \mapsto \frac{2y}{1+y^2}$$

gegeben ist.

(d) Seien $x_1, x_2 \in [-1,1]$ mit $x_1 < x_2$. Zu zeigen ist $f^{-1}(x_1) < f^{-1}(x_2)$. Dies ergibt sich aus

$$\begin{aligned}
f^{-1}(x_2) - f^{-1}(x_1) &= \frac{2x_2}{1+x_2^2} - \frac{2x_1}{1+x_1^2} \\
&= \frac{2x_2(1+x_1^2) - 2x_1(1+x_2^2)}{(1+x_2^2)(1+x_1^2)} \\
&= \frac{2(x_2 - x_1 + x_1^2 x_2 - x_1 x_2^2)}{(1+x_2^2)(1+x_1^2)} \\
&= \frac{2(x_2 - x_1 + x_1 x_2(x_1 - x_2))}{(1+x_2^2)(1+x_1^2)} \\
&= \frac{2(x_2 - x_1)(1 - x_1 x_2)}{(1+x_2^2)(1+x_1^2)} > 0,
\end{aligned}$$

denn wegen $-1 \leq x_1 < x_2 \leq 1$, gilt $x_1 x_2 < 1$.

Da f^{-1} die Umkehrfunktion von f ist, ist f die Umkehrfunktion von f^{-1}. Da f^{-1} streng monoton wachsend ist, ist es gemäß Vorlesung auch ihre Umkehrfunktion f.

Aufgabe 2 (Tutorium):

(a) Sei $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ ein abgeschlossenes Intervall und seien $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen mit $f(a) > g(a)$ und $f(b) < g(b)$. Zeigen Sie, dass ein $x_0 \in (a,b)$ existiert mit $f(x_0) = g(x_0)$.

(b) Zeigen Sie die Existenz einer Lösung $x_0 \geq 0$ von

$$\frac{1}{1+x^2} = \sqrt{x}.$$

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 2:

(a) Sei $h \coloneqq g - f$. Dann ist $h(a) = g(a) - f(a) < 0$ und $h(b) = g(b) - f(b) > 0$. Nach dem Zwischenwertsatz (h ist als Komposition der stetigen Funktionen f und g stetig) existiert somit ein $x_0 \in (a,b)$ mit $h(x_0) = g(x_0) - f(x_0) = 0$.

(b) Setze $f(x) \coloneqq \frac{1}{1+x^2}$ und $g(x) \coloneqq \sqrt{x}$ für jedes $x \in [0,\infty)$. Beide Funktionen sind stetig auf $[0,\infty)$. Zudem gilt $f(0) = 1 > 0 = g(0)$, $f(1) = \frac{1}{2} < 1 = g(1)$. Nach Teil (a) existiert also ein $x_0 \in (0,1)$ mit $f(x_0) = \frac{1}{1+x_0^2} = \sqrt{x_0} = g(x_0)$.

Aufgabe 3 (Übung):
Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} f(x) = 0.$$

Zeigen Sie, dass es ein $x_M \in \mathbb{R}$ gibt, mit

$$\forall x \in \mathbb{R}: \ |f(x)| \leq |f(x_M)|.$$

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 3:
Ist $f(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$, so ist die Behauptung offensichtlich wahr. Sei also $x_0 \in \mathbb{R}$ mit $\varepsilon := |f(x_0)| > 0$.

Es existiert ein $N \in \mathbb{N}$ derart, dass für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| > N$ gilt $|f(x)| < \varepsilon$, denn:

Angenommen, dies wäre falsch. Dann existiert für alle $N \in \mathbb{N}$ ein $x_N \in \mathbb{R}$ derart, dass $|x_N| > N$ ist, aber $|f(x_N)| \geq \varepsilon$. Es ist klar, dass die Folge $(x_N)_{N\in\mathbb{N}}$ nicht beschränkt ist. O.B.d.A. ist sie nicht nach oben beschränkt. Der Bemerkung im Abschnitt 6.10 des Skriptes nach, besitzt sie eine Teilfolge $(x_{N(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ mit $\lim_{k\to\infty} x_{N(k)} = \infty$. Wegen der Annahme gilt aber $\left|f(x_{N(k)})\right| \geq \epsilon > 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Also $f(x_{N(k)}) \not\to 0$ für $k \to \infty$. Dies ist ein Widerspruch zu $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$. Also muss die Annahme verworfen werden.

Da die Funktion $x \mapsto |f(x)|$ stetig und $[-N, N]$ kompakt ist, existiert nach Satz im Abschnitt 9.15 der Vorlesung ein $x_M \in [-N, N]$ derart, dass $|f(x)| \leq |f(x_M)|$ für alle $x \in [-N, N]$ ausfällt. Für jedes $x \notin [-N, N]$ gilt aber nach Obigem

$$|f(x)| < |f(x_0)| \overset{x_0\in[-N,N]}{\leq} |f(x_M)|.$$

Insgesamt ist also tatsächlich $|f(x)| \leq |f(x_M)|$ für alle $x \in \mathbb{R}$. $\square$

Aufgabe 4 (Tutorium):
Zeigen Sie die folgenden Identitäten.

(a) Zeigen Sie $\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ und $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$.

(b) $\tan(x + y) = \frac{\tan(x)+\tan(y)}{1-\tan(x)\tan(y)}$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$ mit $x,\ y,\ x + y \notin \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}$.

(c) $\arctan(x) + \arctan(y) = \arctan\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)$ für alle $x,\ y \in \mathbb{R}$ mit $|\arctan(x) + \arctan(y)| < \frac{\pi}{2}$.

(d) $(\cosh(x) + \sinh(x))^n = \cosh(nx) + \sinh(nx)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $x \in \mathbb{R}$.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 4:

(a) Nach Vorlesung gilt $\sin(x), \cos(x) > 0$ für $x \in (0, \frac{\pi}{2})$. Durch mehrmaliges Anwenden der Additionstheoreme folgt

$$\begin{aligned}
0 = \cos\left(\tfrac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\tfrac{\pi}{3} + \tfrac{\pi}{6}\right) &= \cos\left(\tfrac{\pi}{3}\right)\cos\left(\tfrac{\pi}{6}\right) - \sin\left(\tfrac{\pi}{3}\right)\sin\left(\tfrac{\pi}{6}\right) \\
&= \cos\left(\tfrac{\pi}{6} + \tfrac{\pi}{6}\right)\cos\left(\tfrac{\pi}{6}\right) - \sin\left(\tfrac{\pi}{6} + \tfrac{\pi}{6}\right)\sin\left(\tfrac{\pi}{6}\right) \\
&= \left(\cos^2\left(\tfrac{\pi}{6}\right) - \sin^2\left(\tfrac{\pi}{6}\right)\right)\cos\left(\tfrac{\pi}{6}\right) - 2\sin^2\left(\tfrac{\pi}{6}\right)\cos\left(\tfrac{\pi}{6}\right) \\
&= \cos\left(\tfrac{\pi}{6}\right)\left(\cos^2\left(\tfrac{\pi}{6}\right) - 3\sin^2\left(\tfrac{\pi}{6}\right)\right)
\end{aligned}$$

Also folgt $\cos^2\left(\frac{\pi}{6}\right) - 3\sin^2\left(\frac{\pi}{6}\right) = 0$ und wegen $\cos^2\left(\frac{\pi}{6}\right) + \sin^2\left(\frac{\pi}{6}\right) = 1$ ergibt sich $4\sin^2\left(\frac{\pi}{6}\right) = 1$, somit $\frac{1}{2} = \left|\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right| = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$. Aus einer beliebigen der obigen Gleichungen folgt dann auch $\cos^2\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{3}{4}$, also $\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.
Weiterhin folgt

$$\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \cos^2\left(\frac{\pi}{6}\right) - \sin^2\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2}.$$

und

$$\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

(b) Seien $x, y \in \mathbb{R}$ mit $x, y, x+y \notin \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}$. Nach den Additionstheoremen (4) aus Abschnitt 7.11 des Skriptes gilt

$$\begin{aligned} \tan(x+y) &= \frac{\sin(x+y)}{\cos(x+y)} = \frac{\sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)}{\cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)} \\ &= \frac{\cos(x)\cos(y)}{\cos(x)\cos(y)} \cdot \frac{\frac{\sin(x)}{\cos(x)} + \frac{\sin(y)}{\cos(y)}}{1 - \frac{\sin(x)}{\cos(y)}\frac{\sin(y)}{\cos(y)}} = \frac{\tan(x) + \tan(y)}{1 - \tan(x)\tan(y)}. \end{aligned}$$

(c) Seien $x, y \in \mathbb{R}$ mit $|\arctan(x) + \arctan(y)| < \frac{\pi}{2}$. Definiere $X := \arctan(x)$ und $Y := \arctan(y)$. Nach Voraussetzung ist also $X, Y \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \subseteq \left(\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right)^c$. Nach Teilaufgabe (a) folgt dann

$$\tan(X+Y) = \frac{\tan(X) + \tan(Y)}{1 - \tan(X)\tan(Y)}.$$

Nach Abschnitt 10.5 des Skriptes bildet tan das Intervall $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ bijektiv auf $\mathbb{R}$ ab mit der Umkehrfunktion $\arctan : \mathbb{R} \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Folglich ist $\arctan \circ \tan = \mathrm{id}_{(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})}$ und $\tan \circ \arctan = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$. Die letzte Identität impliziert

$$\begin{aligned} X + Y &= \arctan(\tan(X+Y)) = \arctan\left(\frac{\tan(X) + \tan(Y)}{1 - \tan(X)\tan(Y)}\right) \\ &= \arctan\left(\frac{\tan(\arctan(x)) + \tan(\arctan(y))}{1 - \tan(\arctan(x))\tan(\arctan(y))}\right) = \arctan\left(\frac{x+y}{1-xy}\right). \end{aligned}$$

(d) Sei $n \in \mathbb{N}$ und $x \in \mathbb{R}$. Es gilt nach Definition aus Abschnitt 10.7 des Skriptes

$$\begin{aligned} (\cosh(x) + \sinh(x))^n &= \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} + \frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^n = (e^x)^n = e^{xn} \\ &= \left(\frac{e^{xn} + e^{-xn}}{2} + \frac{e^{xn} - e^{-xn}}{2}\right) = \cosh(xn) + \sinh(xn). \end{aligned}$$

Aufgabe 5 (Tutorium):

(a) Zeigen Sie, dass für $\varphi, \psi \in \mathbb{R}$ der Abstand der Punkte $e^{i\varphi}$ und $e^{i\psi}$ durch

$$\left|e^{i\varphi} - e^{i\psi}\right| = 2\left|\sin\left(\frac{\varphi-\psi}{2}\right)\right|$$

gegeben ist.

(b) Sei $2 \leq n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass die n-ten Einheitswurzeln — also Lösungen der Gleichung $z^n = 1$ für $z \in \mathbb{C}$ — ein n-Eck mit Umfang $L_n = 2n\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)$ bilden.

(c) Zeigen Sie

$$\lim_{n\to\infty} L_n = 2\pi.$$

(d) Interpretieren Sie die letzte Gleichung und zeichnen Sie für $n = 6$ ein Bild.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 5:

(a) Es gilt

$$e^{i\varphi} - e^{i\psi} = e^{i\frac{\varphi+\psi}{2}} \cdot \left(e^{i\varphi - \frac{\varphi+\psi}{2}} - e^{i\psi - \frac{\varphi+\psi}{2}}\right) = e^{i\frac{\varphi+\psi}{2}} \cdot \left(e^{i\frac{\varphi-\psi}{2}} - e^{-i\frac{\varphi-\psi}{2}}\right) = 2ie^{i\frac{\varphi+\psi}{2}} \cdot \sin\left(\frac{\varphi-\psi}{2}\right).$$

Deshalb ist tatsächlich $\left|e^{i\varphi} - e^{i\psi}\right| = \left|2e^{i\frac{\varphi+\psi}{2}} \cdot \sin\left(\frac{\varphi-\psi}{2}\right)\right| = 2\left|\sin\left(\frac{\varphi-\psi}{2}\right)\right|$.

(b) Die n-ten Einheitswurzeln sind nach Abschnitt 10.6 der Vorlesung durch

$$w_0 := 1 = e^{i\frac{2\pi}{n}\cdot 0},\ w_1 := e^{i\frac{2\pi}{n}\cdot 1},\ \ldots,\ w_{n-1} := e^{i\frac{2\pi}{n}\cdot(n-1)}$$

gegeben. Nach Teilaufgabe (a) gilt

$$|w_{k+1} - w_k| = \left|e^{i\frac{2\pi}{n}\cdot(k+1)} - e^{i\frac{2\pi}{n}\cdot k}\right| = 2\left|\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)\right|$$

für alle $k \in \{0, \ldots, n-1\}$. Also bilden w_k mit $k \in \{0, \ldots, n-1\}$ ein reguläres n-Eck vom Umfang

$$L_n = |w_{n-1} - w_0| + \sum_{k=0}^{n-2} |w_{k+1} - w_k| = 2n\sin\left(\frac{\pi}{n}\right).$$

(c) Nach Beispiel im Abschnitt 9.4 des Skriptes gilt

$$\lim_{n\to\infty} L_n = \lim_{n\to\infty} 2n\sin\left(\frac{\pi}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} 2\pi\frac{\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)}{\frac{\pi}{n}} = \lim_{x\to 0} 2\pi\frac{\sin(x)}{x} = 2\pi.$$

(d) Das Ergebnis lässt sich wie folgt verstehen: Das von den w_k ($k \in \{0, \ldots, n_1\}$) aufgespannte reguläre n-Eck approximiert immer besser den Einheitskreis $\mathbb{S}^1 \subseteq \mathbb{C}$. Der Umfang der Rechtecke approximiert den Umfang der $\mathbb{S}^1$. Eine Skizze für $n = 6$ ist in der Abbildung (1) zu finden.

Aufgabe 6 (Übung):

Sei $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{R}$ abgeschlossen, $f : D \to \mathbb{R}$ stetig und $N := \{x \in D : f(x) = 0\}$. Zeigen Sie die folgenden Aussagen.

(a) N ist abgeschlossen.

(b) Ist N nach unten beschränkt und nichtleer, so hat N ein Minimum.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 6:

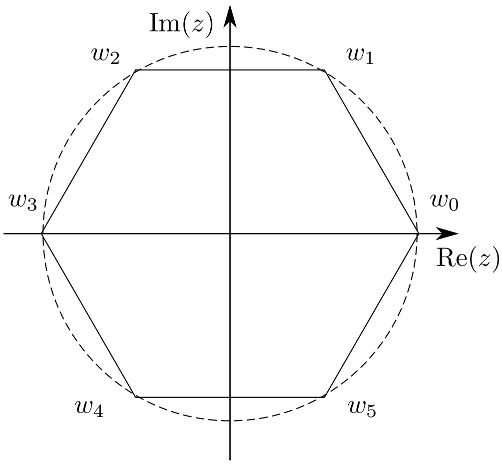

Figure 1: Sechste Einheitswurzeln

(a) Sei (x_n) eine konvergente Folge in N mit $x_n \to x_0$ für $n \to \infty$. Zu zeigen ist, dass $x_0 \in N$ (Definition im Abschnitt 9.14 der Vorlesung).

Da $N \subseteq D$ und D abgeschossen ist, gilt $x_0 \in D$. Weil f stetig ist, gilt

$$f(x_0) = \lim_{n\to\infty} \underbrace{f(x_n)}_{\substack{x_n \in N \\ =0}} = 0.$$

Also ist in der Tat $x_0 \in N$.

(b) Nach Teilaufgabe (a) ist N abgeschlossen. Ferner ist N nach Voraussetzung nicht leer und nach unten beschränkt. Nach Satz im Abschnitt 9.14 des Skriptes gilt $\inf N \in N$. Also hat N ein Minimum.