Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Analysis
Priv.-Doz. Dr. Gerd Herzog
M.Sc. Niklas Knobel
M.Sc. Sebastian Ohrem

9. Übungsblatt

Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Physik

Wintersemester 2023/24

21. Dezember 2023

Behandelt am 11. Januar 2024

Aufgabe 1 (Übung):
Zeigen Sie die folgenden Identitäten:

(a) $\sin(\arctan(x)) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ für $x \in \mathbb{R}$,

(b) $\cos(\arctan(x)) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ für $x \in \mathbb{R}$,

(c) $\arccos(x) = \frac{\pi}{2} - \arcsin(x)$ für $x \in [-1, 1]$,

(d) $\operatorname{Arsinh}(x) = \log(x + \sqrt{x^2+1})$ für $x \in \mathbb{R}$,

(e) $\operatorname{Arcosh}(x) = \log(x + \sqrt{x^2-1})$ für $x \in [1, \infty)$.

Hinweis für (d), (e): Zeigen Sie, dass die Funktionen auf beiden Seiten differenzierbar sind und die gleiche Ableitung haben. Folgern Sie, dass die Differenz beider Funktionen konstant ist.

Aufgabe 2 (Tutorium):
Untersuchen Sie die folgenden Funktionen $f\colon D \to \mathbb{R}$ auf Differenzierbarkeit und bestimmen Sie die Ableitung in allen Punkten, in denen f differenzierbar ist.

(a) $D = \mathbb{R}, \quad f(x) = |x|^3$,

(b) $D = \mathbb{R}, \quad f(x) = x^5 - 3x^2 + 2x + 17$,

(c) $D = \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{x^2+1}$,

(d) $D = (1, \infty), \quad f(x) = \log(\log(x))$,

(e) $D = \mathbb{R}, \quad f(x) = \cos(2x)\mathrm{e}^{\sin(x)}$,

(f) $D = \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{\cosh(x)}}$,

(g) $D = (0, \infty), \quad f(x) = x^x$,

(h) $D = (0, \infty), \quad f(x) = x^{(x^x)}$,

(i) $D = (0, \pi), \quad f(x) = x^{\sin(x)} \sin(x)^x$,

(j) $D = \mathbb{R}, \quad f(x) = |\sin(x)|$.

Aufgabe 3 (Übung):
Zeigen bzw. berechnen Sie mit Hilfe des Mittelwertsatzes die folgenden Ungleichungen bzw. Grenzwerte.

(a) $\mathrm{e}^{x^2} - \mathrm{e}^{y^2} \leq (x-y)(x+y)\mathrm{e}^{x^2}$ für alle $x > y > 0$.

(b) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(x\left(\log\left(1 + \sqrt{1+x^2}\right) - \log(x)\right)\right)$.

(c) $x\log(x) - y\log(y) \leq (x-y)(1 + \log(x))$ für alle $x > y > 0$.

(d) $|\log(\cos(x)) - \log(\cos(y))| \leq \sqrt{3}|x-y|$ für alle $x, y \in [-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}]$.

Aufgabe 4 (Tutorium):

(a) Sei $f\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$ durch $f(x) = x^{(\frac{1}{x})}$ für alle $x \in (0,\infty)$. Zeigen Sie, dass f sein Maximum annimmt und berechnen Sie dieses.

(b) Sei $n \in \mathbb{N}$. Für eine physikalische Größe werden bei n Messungen die Messwerte $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ bestimmt. Bei der *Methode der kleinsten Quadrate* minimiert man die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} (x - a_k)^2.$$

Zeigen Sie, dass f genau ein Minimum besitzt und berechnen Sie dieses.

Aufgabe 5 (Übung):
Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte.

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\log(x+1)}{\mathrm{e}^x}$,

(b) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{\sin(x-1)}{x^{20}-1}$,

(c) $\displaystyle\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \left(\tan(x) + \frac{1}{x - \frac{\pi}{2}}\right)$,

(d) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x^2\cos(x^{-1})}{\sin(x)}$,

(e) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^{-x^2} - 1 + x\sin(x)}{\sqrt{1-x^2} + x^2 - 1}$,

(f) $\displaystyle\lim_{x\to \pi} \frac{\sin(\sin(x))}{x - \pi}$,

(g) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x^x - x}{1 - x + \log(x)}$,

(h) $\displaystyle\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \left(x - \frac{\pi}{2}\right)\tan(x)$.

Aufgabe 6 (Tutorium):

(a) Berechnen Sie mit dem Satz über die Ableitung von Umkehrfunktionen die Ableitungen von
- Arsinh: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$,
- Arcosh: $[1,\infty) \to [0,\infty)$,

in allen Punkten, in denen die Ableitung existiert.

(b) Es sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *positiv homogen* von Grad $\alpha \in \mathbb{R}$, d.h. es gilt $f(\lambda x) = \lambda^\alpha f(x)$ für $x \in \mathbb{R}, \lambda > 0$. Zeigen Sie, dass f auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ differenzierbar ist mit Ableitung $f'(x) = \frac{\alpha}{x} f(x)$.