Institut für Analysis
Priv.-Doz. Dr. Gerd Herzog
M.Sc. Niklas Knobel
M.Sc. Sebastian Ohrem

Lösungsvorschlag zum 9. Übungsblatt

Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Physik

Wintersemester 2023/24

11. Januar 2024

Aufgabe 1 (Übung):
Zeigen Sie die folgenden Identitäten:

(a) $\sin(\arctan(x)) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ für $x \in \mathbb{R}$,

(b) $\cos(\arctan(x)) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ für $x \in \mathbb{R}$,

(c) $\arccos(x) = \frac{\pi}{2} - \arcsin(x)$ für $x \in [-1,1]$,

(d) $\operatorname{Arsinh}(x) = \log(x + \sqrt{x^2+1})$ für $x \in \mathbb{R}$,

(e) $\operatorname{Arcosh}(x) = \log(x + \sqrt{x^2-1})$ für $x \in [1,\infty)$.

Hinweis für (d), (e): Zeigen Sie, dass die Funktionen auf beiden Seiten differenzierbar sind und die gleiche Ableitung haben. Folgern Sie, dass die Differenz beider Funktionen konstant ist.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 1:

(a) Für $x \in \mathbb{R}$ ist $y := \arctan(x) \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ und damit $\cos(y) > 0$. Wegen $x = \tan(y)$ erhalten wir daraus

$$\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{\tan(y)}{\sqrt{1+\tan^2(y)}} = \frac{\frac{\sin(y)}{\cos(y)}}{\sqrt{\frac{\cos^2(y)+\sin^2(y)}{\cos^2(y)}}} = \sin(y).$$

(b) Ähnlich wie in Teil (a) berechnen wir

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{\cos^2(y)+\sin^2(y)}{\cos^2(y)}}} = \cos(y).$$

(c) Wir erinnern, dass $\arccos\colon [-1,1] \to [0,\pi]$ und $\arcsin\colon [-1,1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ sind. Sei nun $x \in [-1,1]$. Setze $y = \frac{\pi}{2} - \arcsin(x)$. Dann ist $y \in [0,\pi]$. Weiter ist

$$\cos(y) = \sin(y + \tfrac{\pi}{2}) = \sin(\pi - \arcsin(x)) = -\sin(-\arcsin(x)) = \sin(\arcsin(x)) = x.$$

Also ist $y \in [0,\pi]$ eine Lösung von $\cos(y) = x$, d.h. $y = \arccos(x)$.

(d) Die linke und rechte Seite der Gleichung bezeichnen wir mit $f(x)$ bzw. $g(x)$. Dann sind f, g beliebig oft differenzierbar als Komposition solcher Funktionen (beachte: $x + \sqrt{x^2+1} > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$). Wir berechnen die Ableitungen beider Seiten:

$$f'(x) \overset{\text{VL}}{=} \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, \qquad g'(x) = \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}},$$

also gilt $f'(x) = g'(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$, und insbesondere ist $(f-g)'(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Nach Vorlesung ist $f - g$ gleich einer Konstanten C. Nun berechnen wir

$$C = f(0) - g(0) = \operatorname{Arsinh}(0) - \log(0 + \sqrt{0^2+1}) = 0 - 0 = 0.$$

(e) Wie in (d) bezeichnen wir die beiden Seiten mit $f(x)$ bzw. $g(x)$, und sehen, dass beide stetig auf $[1, \infty)$ und beliebig oft auf $(1, \infty)$ differenzierbar sind. Die Ableitungen sind

$$f'(x) \overset{\text{VL}}{=} \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \qquad g'(x) = \frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}\left(1+\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\right) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}.$$

Daraus folgt wie in (d), dass eine Konstante $C \in \mathbb{R}$ mit $f(x) - g(x) = C$ für alle $x \in [1, \infty)$ gibt. Aus

$$C = f(1) - g(1) = \operatorname{Arcosh}(1) - \log(0 + \sqrt{1-0^2}) = 0 - 0 = 0$$

folgt die Behauptung.

Aufgabe 2 (Tutorium):
Untersuchen Sie die folgenden Funktionen $f\colon D \to \mathbb{R}$ auf Differenzierbarkeit und bestimmen Sie die Ableitung in allen Punkten, in denen f differenzierbar ist.

(a) $D = \mathbb{R}, \quad f(x) = |x|^3$,

(b) $D = \mathbb{R}, \quad f(x) = x^5 - 3x^2 + 2x + 17$,

(c) $D = \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{x^2+1}$,

(d) $D = (1, \infty), \quad f(x) = \log(\log(x))$,

(e) $D = \mathbb{R}, \quad f(x) = \cos(2x)\mathrm{e}^{\sin(x)}$,

(f) $D = \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{\cosh(x)}}$,

(g) $D = (0, \infty), \quad f(x) = x^x$,

(h) $D = (0, \infty), \quad f(x) = x^{(x^x)}$,

(i) $D = (0, \pi), \quad f(x) = x^{\sin(x)} \sin(x)^x$,

(j) $D = \mathbb{R}, \quad f(x) = |\sin(x)|$.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 2:
Alle Funktionen bis auf diejenige in Teil a) und j) sind als Komposition differenzierbarer Funktionen (ohne Nullstellen im Nenner) auf ihrem kompletten Definitionsbereich differenzierbar.

(a) Für jedes $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$f(x) = \begin{cases} x^3, & \text{für } x \geq 0, \\ -x^3, & \text{für } x < 0. \end{cases}$$

Nach Vorlesung ist f auf $(0, \infty)$ differenzierbar mit $f'(x) = 3x^2$, $x > 0$. Ebenso ist f auf $(-\infty, 0)$ differenzierbar mit $f'(x) = -3x^2$, $x < 0$. Da f in 0 stetig ist und

$$\lim_{x \to 0+} f'(x) = 0 = \lim_{x \to 0-} f'(x)$$

gelten, folgt aus Satz 11.10, dass f auch in 0 differenzierbar ist mit Ableitung $f'(0) = 0$.

(b) Für jedes $x \in \mathbb{R}$ gilt $f'(x) = 5x^4 - 6x + 2$.

(c) Nach der Quotientenregel gilt für jedes $x \in \mathbb{R}$, dass

$$f'(x) = \frac{0 - 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{-2x}{(x^2+1)^2}.$$

(d) Nach der Vorlesung ist log differenzierbar und es gilt $\log'(x) = \frac{1}{x}$ für alle $x > 0$. Es folgt mit der Kettenregel, dass

$$f'(x) = [\log \circ \log]'(x) = (\log' \circ \log)(x) \cdot \log'(x) = \frac{1}{\log(x)} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x \log(x)} \qquad \forall x > 1$$

(e) Mit der Kettenregel gilt $[\exp \circ \sin]' = (\exp' \circ \sin) \cdot \sin' = (\exp \circ \sin) \cdot \cos$. Sei ferner $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch $g(x) = 2x$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Es folgt wieder mit der Kettenregel $(\cos \circ g)' = (\cos' \circ g) \cdot g' = -2(\sin \circ g)$. Mit der Produktregel folgt

$$\begin{aligned} f'(x) &= [(\cos \circ g) \cdot (\exp \circ \sin)]'(x) \\ &= (\cos \circ g)'(x) \cdot (\exp \circ \sin)(x) + (\cos \circ g)(x) \cdot (\exp \circ \sin)'(x) \\ &= -2\sin(2x)\mathrm{e}^{\sin(x)} + \cos(2x)\cos(x)\mathrm{e}^{\sin(x)} \\ &= (\cos(2x)\cos(x) - 2\sin(2x))\mathrm{e}^{\sin(x)} \end{aligned}$$

(f) Aus der Vorlesung ist bekannt, dass cosh differenzierbar ist und $\cosh' = \sinh$ gilt. Ebenfalls laut Vorlesung ist die Abbildung $g\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$ definiert durch $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} = x^{-\frac{1}{2}}$ differenzierbar und es gilt $g'(x) = -\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}$ für alle $x > 0$. Es folgt mit der Kettenregel, dass

$$\begin{aligned} f'(x)&(g \circ \cosh)'(x) \\ &= (g' \circ \cosh)(x) \cdot \cosh'(x) \\ &= \left(-\frac{1}{2}\frac{1}{(\cosh(x))^{\frac{3}{2}}}\right) \cdot \sinh(x) \\ &= -\frac{\sinh(x)}{2(\cosh(x))^{\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$

(g) Es gilt $f(x) = x^x = \mathrm{e}^{x \log x}$. Sei $g(x) := x\log(x)$. Mit der Ketten- und Produktregel folgt dann für jedes $x > 0$

$$f'(x) = \mathrm{e}^{g(x)}g'(x) = x^x(1 \cdot \log x + x \cdot x^{-1}) = (1 + \log x)x^x.$$

(h) Setzt man $g(x) := x^x = \mathrm{e}^{x \log x}$ und $h(x) := g(x)\log(x)$, so ist $f(x) = x^{g(x)} = \mathrm{e}^{g(x)\log x} = \mathrm{e}^{h(x)}$ für jedes $x > 0$. Mit Teil h) sowie der Ketten- und Produktregel folgt für $x > 0$, dass

$$f'(x) = \mathrm{e}^{h(x)}h'(x) = x^{(x^x)}\big(g'(x)\log x + g(x)x^{-1}\big) = x^{(x^x)}\big((1+\log x)x^x \log x + x^{x-1}\big).$$

(i) Sei $g\colon (0,\pi) \to \mathbb{R}$ definiert durch $g(x) = x^{\sin(x)} = \mathrm{e}^{\log(x)\sin(x)}$ und $h\colon (0,\pi) \to \mathbb{R}$ durch $h(x) = \sin(x)^x = \mathrm{e}^{\log(\sin(x))x}$. Mit der Ketten- und Produktregeln folgt

$$\begin{aligned} g'(x) &= (\exp\circ(\log\cdot\sin))'(x) = (\exp'\circ(\log\cdot\sin))(x)\cdot(\log\cdot\sin)'(x) \\ &= (\exp\circ(\log\cdot\sin))(x)\cdot\big(\log'\cdot\sin+\log\cdot\sin'\big)(x) \\ &= x^{\sin(x)}\cdot\left(\frac{\sin(x)}{x}+\log(x)\cos(x)\right) \end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned} h'(x) &= (\exp\circ(\log\circ\sin\cdot\mathrm{id}))'(x) = (\exp'\circ(\log\circ\sin\cdot\mathrm{id}))(x)\cdot(\log\circ\sin\cdot\mathrm{id})'(x) \\ &= (\exp\circ(\log\circ\sin\cdot\mathrm{id}))(x)\cdot((\log\circ\sin)'\cdot\mathrm{id}+(\log\circ\sin)\cdot\mathrm{id}')(x) \\ &= (\exp\circ(\log\circ\sin\cdot\mathrm{id}))(x)\cdot((\log'\circ\sin\cdot\sin')\cdot\mathrm{id}+(\log\circ\sin))(x) \\ &= \sin(x)^x\left(\frac{x\cos(x)}{\sin(x)}+\log(\sin(x))\right). \end{aligned}$$

Mit der Produktregel ergibt sich damit:

$$\begin{aligned} f'(x) &= [g\cdot h]'(x) = g'(x)h(x)+g(x)h'(x) \\ &= x^{\sin(x)}\sin(x)^x\left(\frac{\sin(x)}{x}+\log(x)\cos(x)+\frac{x\cos(x)}{\sin(x)}+\log(\sin(x))\right) \end{aligned}$$

(j) Die Funktion f lässt sich offenbar auch als

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x = k\pi \text{ mit } k \in \mathbb{Z} \\ \sin x & \text{falls } x \in (k\pi,(k+1)\pi) \text{ mit } k \in \mathbb{Z},\ k \text{ gerade} \\ -\sin x & \text{falls } x \in (k\pi,(k+1)\pi) \text{ mit } k \in \mathbb{Z},\ k \text{ ungerade} \end{cases}$$

schreiben. Weil sin auf $\mathbb{R}$ differenzierbar ist, ist f auf $\mathbb{R} \setminus \{k\pi\colon k \in \mathbb{Z}\}$ differenzierbar und es gilt dort

$$f'(x) = \begin{cases} \cos x, & \text{falls } x \in (k\pi,(k+1)\pi) \text{ mit } k \in \mathbb{Z},\ k \text{ gerade} \\ -\cos x, & \text{falls } x \in (k\pi,(k+1)\pi) \text{ mit } k \in \mathbb{Z}, k \text{ ungerade.} \end{cases}$$

In den Punkten $\{k\pi\colon k \in \mathbb{Z}\}$ ist f nicht differenzierbar: Wir untersuchen zunächst die Stellen $x_0 = k\pi$ mit geradem $k \in \mathbb{Z}$ und zeigen, dass der Grenzwert $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ nicht existiert. Es gilt nämlich

$$\lim_{x\to x_0+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0+}\frac{\sin x - \sin x_0}{x-x_0} = \sin'(x_0) = \cos(x_0) = 1$$

und

$$\lim_{x\to x_0-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0-}\frac{-\sin x-(-\sin x_0)}{x-x_0}=(-\sin)'(x_0)=-\cos(x_0)=-1.$$

Also ist f in diesen Punkten nicht differenzierbar. An den Stellen $k\pi$ mit ungeradem $k\in\mathbb{Z}$ kann man analog zeigen, dass die einseitigen Grenzwerte des Differenzenquotienten -1 und 1 sind, weswegen f dann auch in diesen Punkten nicht differenzierbar ist.

Aufgabe 3 (Übung):
Zeigen bzw. berechnen Sie mit Hilfe des Mittelwertsatzes die folgenden Ungleichungen bzw. Grenzwerte.

(a) $\mathrm{e}^{x^2}-\mathrm{e}^{y^2}\le(x-y)(x+y)\mathrm{e}^{x^2}$ für alle $x>y>0$.

(b) $\lim\limits_{x\to\infty}\big(x\big(\log\big(1+\sqrt{1+x^2}\big)-\log(x)\big)\big)$.

(c) $x\log(x)-y\log(y)\le(x-y)(1+\log(x))$ für alle $x>y>0$.

(d) $|\log(\cos(x))-\log(\cos(y))|\le\sqrt{3}|x-y|$ für alle $x,y\in[-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}]$.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 3:

(a) Seien $x,y\in\mathbb{R}$ mit $0<y<x$. Betrachte die Funktion $f\colon[y^2,x^2]\to\mathbb{R}$, $t\mapsto\mathrm{e}^t$. Da f auf $[y^2,x^2]$ stetig und auf (y^2,x^2) differenzierbar ist, erfüllt f die Voraussetzungen des Mittelwertsatzes. Danach existiert ein $\xi\in(y^2,x^2)$ mit

$$\mathrm{e}^{x^2}-\mathrm{e}^{y^2}=f(x^2)-f(y^2)=(x^2-y^2)f'(\xi)=(x-y)(x+y)\mathrm{e}^{\xi}\le(x-y)(x+y)\mathrm{e}^{x^2}$$

wegen der Monotonie der (reellen) Exponentialfunktion.

(b) Sei $x\ge1$. Dann ist log auf $[x,1+\sqrt{1+x^2}]$ stetig und auf $(x,1+\sqrt{1+x^2})$ differenzierbar. Nach dem Mittelwertsatz existiert dann ein $\xi_x\in(x,1+\sqrt{1+x^2})$ mit

$$\begin{aligned}x\Big(\log\Big(1+\sqrt{1+x^2}\Big)-\log(x)\Big)&=\frac{x}{\xi_x}\Big(1+\sqrt{1+x^2}-x\Big)\\&=\frac{x}{\xi_x}\Big(1+\sqrt{1+x^2}-\sqrt{x^2}\Big)\\&=\frac{x}{\xi_x}\left(1+\frac{1}{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{x^2}}\right)\end{aligned}$$

Wegen $x<\xi_x<1+\sqrt{1+x^2}$ gilt ferner

$$\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+\frac{1}{x}}=\frac{x}{1+\sqrt{1+x^2}}\le\frac{x}{\xi_x}\le\frac{x}{x}=1.$$

Damit ist $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x}{\xi_x}=1$ nach dem Sandwichkriterium. Deshalb ist

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to\infty}x\Big(\log\Big(1+\sqrt{1+x^2}\Big)-\log(x)\Big)\\&=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{\xi_x}\left(1+\frac{1}{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{x^2}}\right)\\&=\left(\lim_{x\to\infty}\frac{x}{\xi_x}\right)\cdot\left(\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{x^2}}\right)\right)\\&=1.\end{aligned}$$

(c) Seien $0<y<x$. Definiere $f\colon[y,x]\to\mathbb{R}$, $t\mapsto t\log(t)$. Dann ist f auf $[y,x]$ stetig und auf (y,x) differenzierbar mit $f'(t)=1\cdot\log(t)+t\cdot\frac{1}{t}=1+\log(t)$, $t\in(y,x)$. Nach dem Mittelwertsatz existiert ein $\xi\in(y,x)$ mit

$$x\log(x)-y\log(y)=(x-y)f'(\xi)=(x-y)(1+\log(\xi))\le(x-y)(1+\log(x)),$$

weil $\log\colon(0,\infty)\to\mathbb{R}$ streng monoton wachsend ist.

(d) Wir betrachten die Funktion $f\colon [-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}] \to \mathbb{R},\ t \mapsto \log(\cos(t))$. Diese ist auf $[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}]$ stetig differenzierbar mit $f'(t) = \frac{-\sin(t)}{\cos(t)} = -\tan(t)$. Da tan auf $[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}]$ streng monoton wachsend ist und $\tan(-\frac{\pi}{3}) = -\sqrt{3}$ sowie $\tan(\frac{\pi}{3}) = \sqrt{3}$ gelten, ergibt sich

$$|f'(t)| \leq \sqrt{3} \qquad \text{für alle } t \in [-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}].$$

Sind $x, y \in [-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}]$, so finden wir nach dem Mittelwertsatz ein ξ zwischen x und y mit

$$f(x) - f(y) = f'(\xi)(x - y).$$

Es folgt

$$|f(x) - f(y)| = |f'(\xi)||x - y| \leq \sqrt{3}|x - y|.$$

Aufgabe 4 (Tutorium):

(a) Sei $f\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$ durch $f(x) = x^{(\frac{1}{x})}$ für alle $x \in (0,\infty)$. Zeigen Sie, dass f sein Maximum annimmt und berechnen Sie dieses.

(b) Sei $n \in \mathbb{N}$. Für eine physikalische Größe werden bei n Messungen die Messwerte $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ bestimmt. Bei der *Methode der kleinsten Quadrate* minimiert man die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} (x - a_k)^2.$$

Zeigen Sie, dass f genau ein Minimum besitzt und berechnen Sie dieses.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 4:

(a) *Beweis:* Zunächst halten wir fest, dass f beliebig oft differenzierbar ist als Komposition solcher Funktionen. Wegen $f(x) = \exp(\frac{1}{x}\log(x))$ berechnen wir als Ableitung

$$f'(x) = \exp(\tfrac{1}{x}\log(x)) \cdot (-\tfrac{1}{x^2}\log(x) + \tfrac{1}{x^2}) = \frac{x^{(\frac{1}{x})}}{x^2}(1 - \log(x)).$$

Also gilt $f'(x) > 0$ für $x < \mathrm{e}$, $f'(x) < 0$ für $x > \mathrm{e}$. Somit ist f auf $(0, \mathrm{e})$ streng monoton wachsend und auf (e, ∞) streng monoton fallend. Es folgt, dass f in e sein globales Maximum annimmt. Der Maximalwert ist $f(\mathrm{e}) = \mathrm{e}^{(\frac{1}{\mathrm{e}})} \approx 1{,}445$. □

(b) Zunächst ist f als Polynomfunktion differenzierbar. Es gilt

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{n} 2(x - a_k) = 2\left(\sum_{k=1}^{n} x - \sum_{m=1}^{n} a_m\right) = 2nx - 2\sum_{k=1}^{n} a_k = 2n\left(x - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k\right)$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Insbesondere ist

$$f'(x) \begin{cases} > 0, & \text{für } x > \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k \\ = 0, & \text{für } x = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k \\ < 0, & \text{für } x < \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k. \end{cases}.$$

Nach Vorlesung ist f auf $(-\infty, \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k]$ monoton fallend und auf $[\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k, \infty)$ monoton wachsend. Das bedeutet: Ist $x \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k$, so ist $f(x) \geq f(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k)$; ist $x \geq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k$, so ist $f(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k) \leq f(x)$. Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt also $f(x) \geq f(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k)$.

Angenommen, es gäbe ein $b \in \mathbb{R}$ mit $b \neq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k$ und $f(b) = g(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k)$. O.B.d.A. ist $b > \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k$. Nach dem Mittelwertsatz aus Abschnitt 10.6 der Vorlesung, existiert ein $\xi \in (\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k, b)$ mit $f'(\xi) = 0$. Nach obiger Rechnung ist aber $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k$ die einzige Nullstelle von f'.

Also muss die Annahme verworfen werden und $a = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k$ ist die gesuchte eindeutige Stelle des globalen Minimums von g.

Aufgabe 5 (Übung):
Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte.

(a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\log(x+1)}{\mathrm{e}^x}$,

(b) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sin(x-1)}{x^{20}-1}$,

(c) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \left(\tan(x) + \dfrac{1}{x-\frac{\pi}{2}}\right)$,

(d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2\cos(x^{-1})}{\sin(x)}$,

(e) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\mathrm{e}^{-x^2}-1+x\sin(x)}{\sqrt{1-x^2}+x^2-1}$,

(f) $\lim\limits_{x\to \pi} \dfrac{\sin(\sin(x))}{x-\pi}$,

(g) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^x-x}{1-x+\log(x)}$,

(h) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)\tan(x)$.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 5:

(a) Da die Funktion $f\colon (-1,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{\log(x+1)}{\mathrm{e}^x}$ stetig ist, gilt

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log(x+1)}{\mathrm{e}^x} = f(0) = 0.$$

(b) Es gilt $\lim\limits_{x\to 1}\sin(x-1)=0$ und $\lim\limits_{x\to 1} x^{20}-1=0$. Die Regel von l'Hospital liefert

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sin(x-1)}{x^{20}-1} = \lim_{x\to 1}\frac{\cos(x-1)}{20x^{19}} = \frac{1}{20}.$$

(c) Für $x\in[0,\pi]\setminus\{\frac{\pi}{2}\}$ ist

$$\tan(x)+\frac{1}{x-\frac{\pi}{2}} = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}+\frac{1}{x-\frac{\pi}{2}} = \frac{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\sin(x)+\cos(x)}{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\cos(x)} =: \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Es gilt

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} f(x) = 0 = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} g(x).$$

Mit der Regel von de l'Hospital folgt

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin(x)+\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\cos(x)-\sin(x)}{\cos(x)-\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\sin x}\\ &= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\cos(x)}{\cos(x)-\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\sin(x)} =: \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{F(x)}{G(x)},\end{aligned}$$

sofern der letzte Grenzwert tatsächlich existiert. Es gilt

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} F(x) = 0 = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} G(x).$$

Nochmalige Anwendung der Regel von de l'Hospital liefert

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{F(x)}{G(x)} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{F'(x)}{G'(x)} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos(x)-\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\sin(x)}{-\sin(x)-\sin(x)-\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\cos(x)} = \frac{0}{-2} = 0.$$

Insgesamt haben wir also

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\tan(x)+\frac{1}{x-\frac{\pi}{2}}\right) = 0.$$

Die Begründung, warum wir l'Hospital anwenden dürfen, erfolgt dabei rückwärts: Da $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{F'(x)}{G'(x)} = 0$ ist, existiert auch $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{F(x)}{G(x)} = 0$, weshalb auch $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{f(x)}{g(x)} = 0$ existiert.

(d) Wir versuchen, ob wir die Regel von de l'Hospital anwenden können. Hier konvergieren Zähler $f(x) = x^2 \cos(x^{-1})$ und Nenner $g(x) = \sin(x)$ gegen 0, aber

$$\lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{2x\cos(x^{-1}) + x^2 \sin(x^{-1})\frac{1}{x^2}}{\cos(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{2x\cos(x^{-1}) + \sin(x^{-1})}{\cos(x)}$$

existiert nicht, denn für $x_n := ((n+\frac{1}{2})\pi)^{-1}$ hat der Bruch den Wert $\frac{(-1)^n}{\cos(x_n)}$. Die Regel von de l'Hospital ist demnach nicht anwendbar. Der Grenzwert existiert jedoch, denn

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2\cos(x^{-1})}{\sin(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin(x)} \cdot x\cos(x^{-1}) = 1 \cdot 0 = 0.$$

(e) Zähler und Nenner sind differenzierbar in $(-1,1)$ und nehmen in 0 den Wert Null an. Die Regel von de l'Hospital liefert (mit $f(x) := \mathrm{e}^{-x^2} - 1 + x\sin(x)$ und $g(x) := \sqrt{1-x^2} + x^2 - 1$)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^{-x^2} - 1 + x\sin(x)}{\sqrt{1-x^2}+x^2-1} = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{-2x\mathrm{e}^{-x^2} + \sin(x) + x\cos(x)}{-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + 2x}.$$

Dieser Grenzwert existiert (wie wir gleich zeigen), und wir bestimmen ihn durch ein weiteres Anwenden der Regel von de l'Hospital, denn Zähler und Nenner sind wieder differenzierbar auf $(-1,1)$ und nehmen in 0 den Wert Null an. Es folgt

$$\lim_{x\to 0} \frac{-2x\mathrm{e}^{-x^2} + \sin(x) + x\cos(x)}{-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + 2x} = \lim_{x\to 0} \frac{-2\mathrm{e}^{-x^2} + 4x^2\mathrm{e}^{-x^2} + 2\cos(x) - x\sin(x)}{-\frac{\sqrt{1-x^2}+\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2} + 2} = \frac{0}{1} = 0$$

(f) Die Funktionen $f_1, f_2\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f_1(x) = \sin(\sin(x)) \qquad \text{und} \qquad f_2(x) = x - \pi$$

sind differenzierbar und es gilt $\lim_{x\to\pi} f_1(x) = \lim_{x\to 1} f_2(x) = 0$. Folglich gilt nach der Regel von l'Hospital

$$\lim_{x\to\pi} \frac{\sin(\sin(x))}{x-\pi} = \lim_{x\to\pi} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \lim_{x\to\pi} \frac{f_1'(x)}{f_2'(x)} = \lim_{x\to\pi} \frac{\cos(\sin(x))\cos(x)}{1} = -1.$$

(g) Wir wenden zwei Mal hintereinander die Regel von de l'Hospital an (Zähler und Nenner nehmen in beiden Fällen den Wert 0 an). Wegen $(x^x)' = x^x(1+\log x)$ (siehe Aufgabe 2) ergibt sich

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^x - x}{1 - x + \log(x)} = \lim_{x\to 1} \frac{x^x(1+\log(x)) - 1}{-1 + \frac{1}{x}} = \lim_{x\to 1} \frac{x^x(1+\log(x))^2 + x^x\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \frac{1+1}{-1} = -2.$$

(h) Wir möchten

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \left(x - \frac{\pi}{2}\right)\tan(x) = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\sin(x)}{\cos(x)} =: \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{f(x)}{g(x)}$$

berechnen. Es gilt

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} f(x) = 0 = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} g(x).$$

Mit der Regel von de l'Hospital folgt

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \left(x-\frac{\pi}{2}\right)\tan(x) = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(x) + \left(x-\frac{\pi}{2}\right)\cos(x)}{-\sin(x)} = -1.$$

Aufgabe 6 (Tutorium):

(a) Berechnen Sie mit dem Satz über die Ableitung von Umkehrfunktionen die Ableitungen von

- $\operatorname{Arsinh}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,
- $\operatorname{Arcosh}\colon [1, \infty) \to [0, \infty)$,

in allen Punkten, in denen die Ableitung existiert.

(b) Es sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *positiv homogen* von Grad $\alpha \in \mathbb{R}$, d.h. es gilt $f(\lambda x) = \lambda^\alpha f(x)$ für $x \in \mathbb{R}, \lambda > 0$. Zeigen Sie, dass f auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ differenzierbar ist mit Ableitung $f'(x) = \frac{\alpha}{x} f(x)$.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 6:

(a) *Sinus Hyperbolicus:* Es ist $\sinh\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig mit Grenzwerten $\lim_{x\to\pm\infty} \sinh(x) = \pm\infty$. Nach dem Zwischenwertsatz ist also $\sinh(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$. Wegen $\sinh'(x) = \cosh(x) \geq 1$ ist sinh streng monoton wachsend, also bijektiv, und der Satz über die Ableitung von Umkehrfunktionen liefert:

$$\operatorname{Arsinh}'(x) = \frac{1}{\sinh'(\operatorname{Arsinh}(x))} = \frac{1}{\cosh(\operatorname{Arsinh}(x))} = \frac{1}{\sqrt{1 + \sinh^2(\operatorname{Arsinh}(x))}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$, wobei wir $\cosh^2(y) = 1 + \sinh^2(y) \geq 0$ verwendet haben.

Cosinus Hyperbolicus: Es ist $\cosh\colon [0, \infty) \to \mathbb{R}$ stetig mit $\cosh(0) = 1$ und $\lim_{x\to\infty} \cosh(x) = \infty$. Wegen $\cosh'(x) = \sinh(x) > 0$ für $x > 0$ und dem Mittelwertsatz ist cosh auf $[0, \infty)$ streng monoton wachsend, also bijektiv, und der Satz über die Ableitung von Umkehrfunktionen liefert:

$$\operatorname{Arcosh}'(x) = \frac{1}{\cosh'(\operatorname{Arcosh}(x))} = \frac{1}{\sinh(\operatorname{Arcosh}(x))} = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$$

für $x > 1$, wobei wir $\sinh^2(y) = \cosh^2(y) - 1$ und $\operatorname{Arcosh}(x) > 0$ verwendet haben.

In $x = 1$ ist Arcosh nicht differenzierbar wegen $\cosh'(0) = 0$: Wäre Arcosh differenzierbar, so würde aus der Kettenregel folgen:

$$1 = (\operatorname{Arcosh} \circ \cosh)'(0) = \operatorname{Arcosh}'(\cosh(0)) \cdot \cosh'(0) = \operatorname{Arcosh}'(1) \cdot \sinh(0) = 0.$$

(b) <u>*Beweis:*</u> Sei $x \in \mathbb{R} \setminus 0$. Dann gilt für $|h| < |x|$:

$$f(x+h) = f\big(\big(1 + \tfrac{h}{x}\big) \cdot x\big) = \left(1 + \frac{h}{x}\right)^\alpha f(x).$$

Schreiben wir $g(h) \coloneqq \big(1 + \frac{h}{x}\big)^\alpha$, so ist

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{g(h) - g(0)}{h} f(x) \to g'(0) f(x).$$

Die Ableitung von g lässt sich mit dem bekannten Rechenregeln berechnen als $\alpha \cdot \frac{1}{x}$, woraus die Behauptung folgt.

Alternatives Argument: Für $x > 0$ ist $f(x) = x^\alpha f(1)$ und damit f differenzierbar mit $f'(x) = \alpha x^{\alpha-1} f(1) = \frac{\alpha}{x} f(x)$. Für $x < 0$ folgt die Behauptung analog aus $f(x) = (-x)^\alpha f(-1)$. Dabei folgen die beiden verwendeten Identitäten direkt, indem man in der Annahme $(\lambda, x) \rightsquigarrow (\pm x, \pm 1)$ einsetzt. $\square$