

10. Übungsblatt

Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Physik

Wintersemester 2023/24

11. Januar 2023

Behandelt am 18. Januar 2023

Aufgabe 1 (Tutorium):

Berechnen Sie die Grenzwerte

(i) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x^2+3)}{\ln(x)},$

(ii) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1+\cos(\pi x)}{x^2-2x+1},$

(iii) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sin(\sqrt{x}) - \sin(\sqrt{x+1})).$

Aufgabe 2 (Übung):Finden Sie ein Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ mit $0 \in I$ und eine differenzierbare Funktion $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f'(x) + x^2 f(x) = 0, \quad f(0) = 1.$$

Hinweis: Nehmen Sie an, dass f sich durch eine Potenzreihe darstellen lässt.**Aufgabe 3 (Übung):**Beweisen Sie die *Leibnizregel*. Sei $n \in \mathbb{N}$. Seien $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $f, g: I \rightarrow \mathbb{R}$ zwei in I mindestens n Mal differenzierbare Funktionen. Dann gilt

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}.$$

Aufgabe 4 (Tutorium):(i) Die Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sei durch $f(x) = x^2 - 2x + 1$ definiert. Bestimmen Sie die Potenzreihe, die in einer Umgebung von $x_0 = 0$ die Funktion $\frac{1}{f}$ darstellt.(ii) Die Funktion $g: (-1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ sei durch $g(x) = \ln(1+x)$ definiert. Berechnen Sie das Taylorpolynom $T_4(g; 0)$ und zeigen Sie, dass

$$0 \leq g(x) - T_4(g; 0)(x) \leq \frac{1}{5}x^5$$

für alle $x \geq 0$ gilt.**Aufgabe 5 (Übung):**(i) Die Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sei durch $f(x) = x^2 + 2x - 3$ definiert. Bestimmen Sie eine Potenzreihe, die in einer Umgebung von $x_0 = -1$ die Funktion $\frac{1}{f}$ darstellt.(ii) Die Funktion $g: (-1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ sei durch $g(x) = e^{-x} + \frac{1}{1+x}$ definiert. Berechnen Sie das Taylorpolynom $T_2(g; \frac{1}{2})$ und geben Sie eine Konstante $C > 0$ an, für die

$$\left| g(x) - T_2\left(g; \frac{1}{2}\right)(x) \right| \leq C \left| x - \frac{1}{2} \right|^3$$

für alle $x \in [0, 1]$ gilt.

Aufgabe 6 (Tutorium):

Berechnen Sie mit Hilfe des Riemann-Kriterium

$$\int_0^b x^2 dx.$$

Hinweis: Nutzen sie $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ von Aufgabe 2a aus Übungsblatt 3.