Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Analysis
Priv.-Doz. Dr. Gerd Herzog
M.Sc. Niklas Knobel
M.Sc. Sebastian Ohrem

Lösungsvorschlag zum 10. Übungsblatt

Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Physik

Wintersemester 2023/24

18. Januar 2023

Aufgabe 1 (Tutorium):
Berechnen Sie die Grenzwerte

(i) $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x^2+3)}{\ln(x)}$,

(ii) $\lim_{x\to 1} \frac{1+\cos(\pi x)}{x^2-2x+1}$,

(iii) $\lim_{x\to\infty} \big(\sin(\sqrt{x}) - \sin(\sqrt{x+1})\big)$.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 1:

(a) Nach der Regel von l'Hospital aus (b) im Abschnitt 11.9 der Vorlesung gilt

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\overbrace{\ln(x^2+3)}^{\xrightarrow{x\to\infty}\infty}}{\underbrace{\ln(x)}_{\xrightarrow{x\to\infty}\infty}} \overset{\text{l'Hospital}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{2x}{x^2+3}}{\frac{1}{x}} = 2\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x^2+3} = 2\lim_{x\to\infty} \frac{1}{1+\frac{3}{x^2}} = 2.$$

(b) Nach der Regel von l'Hospital aus (a) im Abschnitt 11.9 der Vorlesung gilt

$$\lim_{x\to 1} \frac{\overbrace{1+\cos(\pi x)}^{\xrightarrow{x\to 1}0}}{\underbrace{x^2-2x+1}_{\xrightarrow{x\to 1}0}} \overset{\text{l'Hospital}}{=} -\pi \lim_{x\to 1} \frac{\overbrace{\sin(\pi x)}^{\xrightarrow{x\to 1}0}}{\underbrace{2x-2}_{\xrightarrow{x\to 1}0}} \overset{\text{l'Hospital}}{=} -\pi^2 \lim_{x\to 1} \frac{\cos(\pi x)}{\underbrace{2}_{\neq 0}} = \frac{\pi^2}{2}.$$

(c) Sinus ist für jedes $x \geq 0$ auf $[\sqrt{x}, \sqrt{x+1}]$ stetig und auf $(\sqrt{x}, \sqrt{x+1})$ differenzierbar. Nach dem Mittelwertsatz aus Abschnitt 11.7 des Skriptes, existiert ein $\xi_x \in (\sqrt{x}, \sqrt{x+1})$ mit

$$\begin{aligned}\sin(\sqrt{x}) - \sin(\sqrt{x+1}) &= -\big(\sin(\sqrt{x+1}) - \sin(\sqrt{x})\big) = -\cos(\xi_x)(\sqrt{x+1} - \sqrt{x}) \\ &= -\cos(\xi_x)\left(\frac{x+1-x}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}\right) = -\cos(\xi_x)\left(\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}\right).\end{aligned}$$

Folglich

$$\big|\sin(\sqrt{x}) - \sin(\sqrt{x+1})\big| = \underbrace{|-\cos(\xi_x)|}_{\leq 1}\left|\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}\right| \leq \frac{1}{2\sqrt{x}} \xrightarrow{x\to\infty} 0,$$

also

$$\lim_{x\to\infty} \big(\sin(\sqrt{x}) - \sin(\sqrt{x+1})\big) = 0.$$

Aufgabe 2 (Übung):
Finden Sie ein Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ mit $0 \in I$ und eine differenzierbare Funktion $f\colon I \to \mathbb{R}$ mit

$$f'(x) + x^2 f(x) = 0, \qquad f(0) = 1.$$

Hinweis: Nehmen Sie an, dass f sich durch eine Potenzreihe darstellen lässt.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 2:
Wir nehmen an, dass

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \qquad \text{für } x \in I = (-R, R),$$

wobei $I = \mathbb{R}$ für $R = \infty$. Nun wissen wir bereits, dass $1 = f(0) = a_0$ gelten muss. Außerdem gilt nach Satz 10.12

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n.$$

Soll f nun die gegebene Gleichung erfüllen, so muss gelten, dass

$$\begin{aligned} 0 &= f'(x) + x^2 f(x) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+2} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n + \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-2} x^n \\ &= a_1 + a_2 x + \sum_{n=2}^{\infty} ((n+1) a_{n+1} + a_{n-2}) x^n \end{aligned}$$

für jedes $x \in I$. Nach Satz 11.15 liefert das per Koeffizientenvergleich, dass

$$a_0 = 1, \quad a_1 = 0, \quad a_2 = 0, \quad a_{n+1} = -\frac{a_{n-2}}{n+1} \quad \text{für } n \geq 1.$$

Für $n = 3k+1$ und $n = 3k+2$ folgt somit $a_{3k+1} = a_{3k+2} = 0$, für $n = 3k$ folgt

$$a_{3k} = -\frac{a_{3(k-1)}}{3k} = \frac{a_{2(k-2)}}{3^2 k(k-1)} = \cdots = (-1)^k \frac{a_0}{3^k k!} = \frac{(-1)^k}{3^k k!}.$$

Somit ergibt sich

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{3k}}{3^k k!} = e^{-\frac{x^3}{3}},$$

und da die Potenzreihe den Konvergenzradius ∞ hat, können wir $I = \mathbb{R}$ wählen.

Aufgabe 3 (Übung):
Beweisen Sie die *Leibnizregel*. Sei $n \in \mathbb{N}$. Seien $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $f, g\colon I \to \mathbb{R}$ zwei in I mindestens n Mal differenzierbare Funktionen. Dann gilt

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}.$$

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 3:
Wir beweisen die Aussage durch vollständige Induktion. Der Induktionsanfang ist die gewöhnliche Produktregel, nach ihr gilt

$$(fg)^{(1)} = f'g + fg' = \sum_{k=0}^{1} \binom{1}{k} f^{(k)} g^{(1-k)}.$$

Für den Induktionsschritt nehmen wir an, dass die Induktionsannahme

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(x_0) g^{(n-k)}$$

für ein natürliches $n \leq m-1$ gilt und zeigen die Behauptung für $n+1$. Es gilt

$$(fg)^{(n+1)} = \Big((fg)^{(n)}\Big)'$$

mit der Induktionsannahme

$$= \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}\right)'$$

mit der Kettenregel

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(f^{(k+1)} g^{(n-k)} + f^{(k)} g^{(n+1-k)}\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} f^{(k)} g^{(n+1-k)} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n+1-k)} \\
&= f^{(n+1)} g + f g^{(n+1)} \\
&\quad + \sum_{k=1}^{n} \left(\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}\right) f^{(k)} g^{(n+1-k)} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} f^{(k)} g^{(n+1-k)}.
\end{aligned}$$

Das ist, was zu zeigen war.

Aufgabe 4 (Tutorium):

(i) Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei durch $f(x) = x^2 - 2x + 1$ definiert. Bestimmen Sie die Potenzreihe, die in einer Umgebung von $x_0 = 0$ die Funktion $\frac{1}{f}$ darstellt.

(ii) Die Funktion $g : (-1, \infty) \to \mathbb{R}$ sei durch $g(x) = \ln(1+x)$ definiert. Berechnen Sie das Taylorpolynom $T_4(g; 0)$ und zeigen Sie, dass

$$0 \leq g(x) - T_4(g; 0)(x) \leq \frac{1}{5} x^5$$

für alle $x \geq 0$ gilt.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 4:

(i) Die Menge der Nullstellen von f ist $N(f) = \{1\}$. Also ist $\frac{1}{f}$ auf $D = \mathbb{R} \setminus N(f)$ erklärt. Gesucht ist eine Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ mit positivem Konvergenzradius $r > 0$ und

$$\frac{1}{x^2 - 2x + 1} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \qquad \forall x \in D : |x| < r.$$

Multiplizieren mit dem Nenner der linken Seite liefert die äquivalente Aussage

$$\begin{aligned}
1 &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+2}\right) - 2\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1}\right) + \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right) \\
&\overset{\text{Index-Shift}}{=} \left(\sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} x^n\right) - 2\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} x^n\right) + \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right) \\
&= \left(\sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} x^n\right) - 2\left(a_0 x + \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-1} x^n\right) + \left(a_0 + a_1 x + \sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n\right) \\
&= a_0 + (a_1 - 2a_0)x + \sum_{n=2}^{\infty} (a_{n-2} - 2a_{n-1} + a_n) x^n \qquad \forall x \in D : |x| < r.
\end{aligned}$$

Beide Seiten dieser Gleichung sind eine Potenzreihe mit positivem Konvergenzradius. Nach Satz 11.15 des Skriptes (Koeffizientenvergleich) gilt

$$a_0 = 1, \quad a_1 - 2a_0 = 0, \quad \forall n \geq 2 : a_{n-2} - 2a_{n-1} + a_n = 0$$

Die ersten fünf Koeffizienten sind

$$a_0 = 1,$$

$$\begin{aligned}
a_1 &= 2a_0 = 2,\\
a_2 &= 2a_1 - a_0 = 4 - 1 = 3,\\
a_3 &= 2a_2 - a_1 = 6 - 2 = 4,\\
a_4 &= 2a_3 - a_2 = 8 - 3 = 5.
\end{aligned}$$

Das legt die Vermutung $a_n = n + 1$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ nahe. Wir beweisen dies durch vollständige Induktion über n.

IA $(n = 0)$: Klar.

IS $(n \rightsquigarrow n+1)$: Sei $n \in \mathbb{N}_0$ beliebig. Es gelte die *(IV)* $a_k = k + 1$ für alle $k \in \{0, \dots, n\}$. Dann gilt für $n + 1$ das Folgende. Ist $n = 0$, so ist $a_{n+1} = a_1 = 2 = (n + 1) + 1$. Ist $n \geq 1$, so gilt

$$a_{n+1} = 2a_n - a_{n-1} \overset{\text{(IV)}}{=} 2(n+1) - (n - 1 + 1) = n + 2 = (n + 1) + 1.$$

Dies schließt den Beweis der Vermutung ab.

Wir müssen noch sicherstellen, dass die gefundene Potenzreihe einen positiven Konvergenzradius hat. Nach der Formel von Cauchy-Hadamard gilt

$$r = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n+1}} = 1 > 0.$$

Für alle $|x| < 1$ gilt also

$$\frac{1}{x^2 - 2x + 1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n.$$

(ii) Die Funktion g ist beliebig oft differenzierbar. Wir berechnen die ersten fünf Ableitungen. Für alle $x \in (-1, \infty)$ gilt

$$\begin{aligned}
g(x) &= \ln(1 + x),\\
g^{(1)}(x) &= \frac{1}{1+x},\\
g^{(2)}(x) &= -\frac{1}{(1+x)^2},\\
g^{(3)}(x) &= \frac{2}{(1+x)^3},\\
g^{(4)}(x) &= -\frac{6}{(1+x)^4},\\
g^{(5)}(x) &= \frac{24}{(1+x)^5}.
\end{aligned}$$

Das Taylor-Polynom $T_4(g; 0)$ ist laut Abschnitt 11.12 des Skriptes Vorlesung durch

$$T_4(g;0)(x) = \sum_{k=0}^{4} \frac{g^{(k)}(0)}{k!} x^k = \ln(1) + 1x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{2}{6}x^3 - \frac{6}{24}x^4 = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ gegeben.

Sei $x \geq 0$. Nach dem Satz von Taylor aus dem Abschnitt 11.12 des Skriptes gibt es ein $\xi \in (0, x)$ mit

$$g(x) - T_4(g;0)(x) = \frac{g^{(5)}(\xi)}{5!} x^5 = \frac{x^5}{5} \frac{1}{(1+\xi)^5}.$$

Wegen $0 < \frac{1}{(1+\xi)^5} < 1$ folgt

$$0 \leq g(x) - T_4(g;0)(x) \leq \frac{1}{5}x^5.$$

Aufgabe 5 (Übung):

(i) Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei durch $f(x) = x^2 + 2x - 3$ definiert. Bestimmen Sie eine Potenzreihe, die in einer Umgebung von $x_0 = -1$ die Funktion $\frac{1}{f}$ darstellt.

(ii) Die Funktion $g : (-1, \infty) \to \mathbb{R}$ sei durch $g(x) = e^{-x} + \frac{1}{1+x}$ definiert. Berechnen Sie das Taylorpolynom $T_2\big(g; \frac{1}{2}\big)$ und geben Sie eine Konstante $C > 0$ an, für die

$$\left| g(x) - T_2\left(g; \frac{1}{2}\right)(x) \right| \leq C \left| x - \frac{1}{2} \right|^3$$

für alle $x \in [0, 1]$ gilt.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 5:

(i) Die Menge der Nullstellen von f ist $N(f) = \{-3, 1\}$. Also ist $\frac{1}{f}$ auf $D = \mathbb{R} \setminus N(f)$ erklärt. Gesucht ist eine Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ mit positivem Konvergenzradius $r > 0$ und

$$\frac{1}{x^2 + 2x - 3} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x+1)^n \qquad \forall x \in D : |x+1| < r.$$

Multiplizieren mit dem Nenner der linken Seite liefert die äquivalente Aussage

$$\begin{aligned}
1 \quad &= \quad \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x+1)^n \right) \big(x^2 + 2x - 3\big) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x+1)^n \right) \big((x+1)^2 - 4\big) \\
&= \quad \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x+1)^{n+2} \right) - 4 \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x+1)^n \right) \\
&\overset{\text{Index-Shift}}{=} \quad \left(\sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} (x+1)^n \right) - 4 \left(a_0 + a_1 (x+1) + \sum_{n=2}^{\infty} a_n (x+1)^n \right) \\
&= \quad -4a_0 - 4a_1 (x+1) + \sum_{n=2}^{\infty} (a_{n-2} - 4a_n)(x+1)^n \qquad \forall x \in D : |x+1| < r.
\end{aligned}$$

Beide Seiten dieser Gleichung sind eine Potenzreihe mit positivem Konvergenzradius. Nach Satz 11.15 des Skriptes (Koeffizientenvergleich) gilt

$$-4a_0 = 1, \quad -4a_1 = 0, \quad \forall n \geq 2 : a_{n-2} - 4a_n = 0.$$

Damit ergibt sich induktiv

$$\begin{aligned}
a_0 &= -\frac{1}{4}, \qquad a_{2n} = \frac{1}{4} a_{2(n-1)} = \cdots = \left(\frac{1}{4}\right)^n a_0 = -\left(\frac{1}{4}\right)^n \frac{1}{4} = -\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}, \\
a_1 &= 0, \qquad a_{2n+1} = \frac{1}{4} a_{2(n-1)+1} = \cdots = \left(\frac{1}{4}\right)^n a_1 = 0.
\end{aligned}$$

Wir müssen noch sicherstellen, dass die gefundene Potenzreihe einen positiven Konvergenzradius hat. Nach der Formel von Cauchy-Hadamard gilt

$$r = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \sqrt[2n]{\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}}} = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \sqrt[2n]{\frac{1}{4}} \frac{1}{\sqrt{4}}} = 2 > 0.$$

Für alle $|x+1| < 2$ gilt also

$$\frac{1}{x^2 + 2x - 3} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4^{n+1}} (x+1)^{2n}.$$

(ii) Die Funktion g ist beliebig oft differenzierbar. Wir berechnen die ersten drei Ableitungen. Für alle $x \in (-1, \infty)$ gilt

$$g(x) = e^{-x} + \frac{1}{1+x},$$

$$
\begin{aligned}
g^{(1)}(x) &= -e^{-x} - \frac{1}{(1+x)^2},\\
g^{(2)}(x) &= e^{-x} + \frac{2}{(1+x)^3},\\
g^{(3)}(x) &= -e^{-x} - \frac{6}{(1+x)^4}.
\end{aligned}
$$

Das Taylor-Polynom $T_2\big(g; \frac{1}{2}\big)$ ist laut Abschnitt 11.12 des Skriptes Vorlesung durch

$$
\begin{aligned}
T^2_{\frac{1}{2}} g(x) &= \sum_{k=0}^{2} \frac{g^{(k)}\big(\frac{1}{2}\big)}{k!}\left(x-\frac{1}{2}\right)^k\\
&= \left(e^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{1+\frac{1}{2}}\right) - \left(e^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{\left(1+\frac{1}{2}\right)^2}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)\\
&\quad + \frac{1}{2}\left(e^{-\frac{1}{2}} + \frac{2}{\left(1+\frac{1}{2}\right)^3}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)^2\\
&= \left(\frac{1}{\sqrt{e}} + \frac{2}{3}\right) - \left(\frac{1}{\sqrt{e}} + \frac{4}{9}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{e}} + \frac{16}{27}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)^2
\end{aligned}
$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ gegeben.

Sei $x \in [0,1]$. Nach dem Satz von Taylor aus dem Abschnitt 11.12 des Skriptes gibt es ein ξ zwischen x und $\frac{1}{2}$ mit

$$
g(x) - T_2\left(g; \frac{1}{2}\right)(x) = \frac{g^{(3)}(\xi)}{3!}\left(x-\frac{1}{2}\right)^3 = -\left(\frac{1}{6\sqrt{e}} + \frac{1}{(1+\xi)^4}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)^3.
$$

Aus $0 < \xi$ folgt

$$
\left|g^{(3)}(\xi)\right| = \left|-e^{-\xi} - \frac{6}{(1+\xi)^4}\right| = e^{-\xi} + \frac{6}{(1+\xi)^4} \overset{\text{Monotonie}}{\leq} e^{-0} + \frac{6}{(1+0)^4} = 7.
$$

Somit gilt mit $C := \frac{7}{6}$ wie gefordert

$$
\left|g(x) - T_2\left(g; \frac{1}{2}\right)\right|(x) \leq C\left|x - \frac{1}{2}\right|^3
$$

für alle $x \in [0,1]$.

Aufgabe 6 (Tutorium):
Berechnen Sie mit Hilfe des Riemann-Kriterium

$$
\int_0^b x^2 dx.
$$

Hinweis: Nutzen sie $\sum\limits_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ von Aufgabe 2a aus Übungsblatt 3.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 6:
Wir schreiben $f : [0,b] \to \mathbb{R} \quad x \mapsto x^2$. Sei $Z_n = x_0, ..., x_n$ mit $x_j = jb/n (j = 0, 1, ..., n)$. Dann gilt $M_j = f(x_j) = (jb/n)^2$ und $m_j = f(x_{j-1}) = ((j-1)b/n)^2$ und $|I_j| = b/n$ und so

$$
\begin{aligned}
S_f(Z_n) &= \sum_{j=1}^{n} f(x_j)|I_j| = \sum_{j=1}^{n} j^2 (b/n)^3 = b^3 \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3} \to \tfrac{b^3}{3} \qquad (n \to \infty)\\
s_f(Z_n) &= \sum_{j=1}^{n} f(x_{j-1})|I_j| = \sum_{j=1}^{n} (j-1)^2 (b/n)^3 = b^3 \frac{(n-1)n(2n-1)}{6n^3} \to \tfrac{b^3}{3} \qquad (n \to \infty).
\end{aligned}
$$

Wobei wir $\sum\limits_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ von Aufgabe 2a aus Übungsblatt 3 in der letzten Gleichung benutzt haben. Damit folgt

$$\int_0^b x^2 dx = \frac{b^3}{3}.$$