Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Analysis
Priv.-Doz. Dr. Gerd Herzog
M.Sc. Niklas Knobel
M.Sc. Sebastian Ohrem

11. Übungsblatt

Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Physik

Wintersemester 2023/24

18. Januar 2023

Behandelt am 25. Januar 2023

Aufgabe 1 (Übung):
Berechnen Sie mit Hilfe von geeigneten Riemannschen (Zwischen)summen die Grenzwerte

(i) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{p+1}} \sum_{k=1}^{n} k^p$, wobei $p \geq 0$ fest ist, und

(ii) $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{k}$.

Aufgabe 2 (Tutorium):
Berechnen Sie mit Hilfe von geeigneten Riemannschen (Zwischen)summen die Grenzwerte

(i) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{k\pi}{2n}\right)$ und

(ii) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \prod_{k=1}^{n} (k+n)^{\frac{1}{n}}$.

Aufgabe 3 (Übung):
Berechnen Sie die Integrale

(i) $\displaystyle\int_{-2}^{2} |t-1|dt$,

(ii) $\displaystyle\int_{1}^{4} \frac{1}{\sqrt{t}(1+\sqrt{t})}dt$,

(iii) $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}t^2 \sin(2t)dt$

(iv) $\displaystyle\int_{1}^{4} \arctan\left(\sqrt{\sqrt{t}-1}\right)dt$,

(v) $\displaystyle\int_{0}^{1} (1+2t)^3 dt$,

(vi) $\displaystyle\int_{1}^{e} t\log(t)dt$.

Aufgabe 4 (Tutorium):
Berechnen Sie die Integrale

(i) $\displaystyle\int_{(k-1)\pi}^{k\pi} |\sin(t)|dt$ für festes $k \in \mathbb{Z}$,

(ii) $\displaystyle\int_{1}^{e} \frac{1}{t(1+\log(t))}dt$,

(iii) $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \arcsin(t)dt$

(iv) $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} t\cos(t)dt$,

(v) $\displaystyle\int_{1}^{2} \frac{t^3}{(1+t^2)^{\frac{3}{2}}}dt$

(vi) $\displaystyle\int_{\frac{\log(3)}{2}}^{\frac{\log(7)}{2}} \frac{1}{\sinh(t)\cosh(t)}dt$.

Aufgabe 5 (Übung):
Sei $f \in C^2([0,2])$, zeigen Sie, dass

$$\lim_{n\to\infty} n \int_0^1 f(x)(f(x+1/n)-f(x))dx = \tfrac{1}{2}(f(1)^2 - f(0)^2)$$

gilt.

Aufgabe 6 (Tutorium):

(i) Beweisen Sie den Mittelwertsatz der Integralrechnung: Ist $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und $g \in R([a.b])$ mit $g \geq 0$ oder $g \leq 0$, so existiert ein $\xi \in [a,b]$ mit

$$\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = f(\xi)\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Folgern Sie daraus: Ist $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig, so existiert ein $\xi \in [a,b]$ mit

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = f(\xi)(b-a).$$

(ii) Sei $a > 0$ und $f\colon [-a,a] \to \mathbb{R}$ stetig. Zeigen Sie: Ist f gerade, also $f(-x) = f(x)$ für alle $x \in [-a,a]$, so gilt

$$\int_{-a}^a f(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Ist f ungerade, also $f(-x) = -f(x)$ für alle $x \in [-a,a]$, so gilt

$$\int_{-a}^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

Temporary page!

LaTeX was unable to guess the total number of pages correctly. As there was some unprocessed data that should have been added to the final page this extra page has been added to receive it.

If you rerun the document (without altering it) this surplus page will go away, because LaTeX now knows how many pages to expect for this document.