Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Analysis
Priv.-Doz. Dr. Gerd Herzog
M.Sc. Niklas Knobel
M.Sc. Sebastian Ohrem

Lösungsvorschlag zum 11. Übungsblatt

Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Physik

Wintersemester 2023/24

25. Januar 2023

Aufgabe 1 (Übung):
Berechnen Sie mit Hilfe von geeigneten Riemannschen (Zwischen)summen die Grenzwerte

(i) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{p+1}} \sum_{k=1}^{n} k^p$, wobei $p \geq 0$ fest ist, und

(ii) $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{k}$.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 1:

(i) Es gilt für jedes $n \in \mathbb{N}$

$$\frac{1}{n^{p+1}} \sum_{k=1}^{n} k^p = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k}{n}\right)^p = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)|I_k| = \sigma_f(Z_n, \xi^{(n)}),$$

wobei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^p$,

$$Z_n = \left\{x_0 = 0, x_1 = \frac{1}{n}, x_2 = \frac{2}{n}, \ldots, x_n = \frac{n}{n} = 1\right\}, \qquad \xi^{(n)} = (\xi_1, \ldots, \xi_n) = (x_1, \ldots, x_n).$$

Die Feinheit der äquidistanten Zerlegung Z_n des Intervalls $[0,1]$ ist $\|Z_n\| = \frac{1}{n} \xrightarrow{n\to\infty} 0$. Da $f \in R([a,b])$ nach Satz 12.5 des Skriptes, gilt $\sigma_f(Z_n, \xi^{(n)}) \xrightarrow{n\to\infty} \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ nach Satz 12.7 des Skriptes. Eine Stammfunktion von f ist durch $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{x^{p+1}}{p+1}$ gegeben. Nach dem Hauptsatz (1) aus Abschnitt 12.10 des Skriptes gilt

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = [F(x)]_{x=0}^1 = \frac{1}{p+1}.$$

(ii) Es gilt für jedes $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{k} = \frac{1}{n} \sum_{k=n}^{2n-1} \frac{n}{k} \overset{\text{Index-}}{\underset{\text{shift}}{=}} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{k+n-1} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1 + \frac{k-1}{n}} = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)|I_k| = \sigma_f(Z_n, \xi^{(n)}),$$

wobei $f : (-1, \infty) \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{1+x}$,

$$Z_n = \left\{x_0 = 0, x_1 = \frac{1}{n}, \ldots, x_{n-1} = \frac{n-1}{n}, x_n = \frac{n}{n} = 1\right\}, \qquad \xi^{(n)} = (x_0, \ldots, x_{n-1}).$$

Die Feinheit der äquidistanten Zerlegung Z_n des Intervalls $[0,1]$ ist $\|Z_n\| = \frac{1}{n} \xrightarrow{n\to\infty} 0$. Da $f \in R([a,b])$ nach Satz 12.5 des Skriptes, gilt $\sigma_f(Z_n, \xi^{(n)}) \xrightarrow{n\to\infty} \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ nach Satz 12.7 des Skriptes. Eine Stammfunktion von f ist durch $F : (-1, \infty) \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \log(1+x)$ gegeben. Nach dem Hauptsatz (1) aus Abschnitt 12.10 des Skriptes gilt

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = [F(x)]_{x=0}^1 = \log(2).$$

Aufgabe 2 (Tutorium):
Berechnen Sie mit Hilfe von geeigneten Riemannschen (Zwischen)summen die Grenzwerte

(i) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \cos\big(\frac{k\pi}{2n}\big)$ und

(ii) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \prod_{k=1}^{n} (k+n)^{\frac{1}{n}}$.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 2:

(i) Es gilt für jedes $n \in \mathbb{N}$

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{k\pi}{2n}\right) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)|I_k| = \sigma_f(Z_n, \xi^{(n)}),$$

wobei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \cos\big(\frac{\pi}{2}x\big)$,

$$Z_n = \left\{x_0 = 0, x_1 = \frac{1}{n}, x_2 = \frac{2}{n}, \ldots, x_n = \frac{n}{n} = 1\right\}, \qquad \xi^{(n)} = (\xi_1, \ldots, \xi_n) = (x_1, \ldots, x_n).$$

Die Feinheit der äquidistanten Zerlegung Z_n des Intervalls $[0,1]$ ist $\|Z_n\| = \frac{1}{n} \xrightarrow{n\to\infty} 0$. Da $f \in R([a,b])$ nach Satz 12.5 des Skriptes, gilt $\sigma_f(Z_n, \xi^{(n)}) \xrightarrow{n\to\infty} \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ nach Satz 12.7 des Skriptes. Eine Stammfunktion von f ist durch $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{2}{\pi}\sin\big(\frac{\pi}{2}x\big)$ gegeben. Nach dem Hauptsatz (1) aus Abschnitt 12.10 des Skriptes gilt

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = [F(x)]_{x=0}^1 = \frac{2}{\pi}.$$

(ii) Es gilt für jedes $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n}\prod_{k=1}^{n}(k+n)^{\frac{1}{n}} &= \prod_{k=1}^{n}\left(\frac{k+n}{n}\right)^{\frac{1}{n}} = \prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n}\right)^{\frac{1}{n}} = \exp\left(\log\left(\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n}\right)^{\frac{1}{n}}\right)\right) \\
&= \exp\left(\sum_{k=1}^{n}\log\left(\left(1+\frac{k}{n}\right)^{\frac{1}{n}}\right)\right) = \exp\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\log\left(1+\frac{k}{n}\right)\right) \\
&= \exp\left(\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)|I_k|\right) = \exp\Big(\sigma_f(Z_n, \xi^{(n)})\Big),
\end{aligned}$$

wobei $f : (-1,\infty) \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \log(1+x)$,

$$Z_n = \left\{x_0 = 0, x_1 = \frac{1}{n}, \ldots, x_{n-1} = \frac{n-1}{n}, x_n = \frac{n}{n} = 1\right\}, \qquad \xi^{(n)} = (x_1, \ldots, x_n).$$

Die Feinheit der äquidistanten Zerlegung Z_n des Intervalls $[0,1]$ ist $\|Z_n\| = \frac{1}{n} \xrightarrow{n\to\infty} 0$. Da $f \in R([a,b])$ nach Satz 12.5 des Skriptes, gilt $\sigma_f(Z_n, \xi^{(n)}) \xrightarrow{n\to\infty} \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ nach Satz 12.7 des Skriptes. Da die Exponentialfunktion stetig ist, gilt $\exp\big((\sigma_f(Z_n, \xi^{(n)})\big) \xrightarrow{n\to\infty} \exp\Big(\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\Big)$. Eine Stammfunktion von f ist durch

$$F : (-1,\infty) \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto (x+1)\log(x+1) - x$$

gegeben (vgl. Beispiel (2) im Abschnitt 12.11 des Skriptes). Nach dem Hauptsatz (1) aus Abschnitt 12.10 des Skriptes gilt

$$\exp\left(\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right) = \exp\Big([F(x)]_{x=0}^1\Big) = \exp(2\log(2) - 1) = \frac{\big(e^{\log(2)}\big)^2}{e} = \frac{4}{e}.$$

Aufgabe 3 (Übung):
Berechnen Sie die Integrale

(i) $\int_{-2}^{2} |t-1| dt,$

(ii) $\int_{1}^{4} \frac{1}{\sqrt{t}(1+\sqrt{t})} dt,$

(iii) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} t^2 \sin(2t) dt$

(iv) $\int_{1}^{4} \arctan\left(\sqrt{\sqrt{t}-1}\right) dt,$

(v) $\int_{0}^{1} (1+2t)^3 dt,$

(vi) $\int_{1}^{e} t \log(t) dt.$

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 3:
Wir halten zunächst fest, dass jeder Integrand auf dem jeweiligen Integrationsintervall stetig ist und deshalb auch integrierbar nach Satz aus Abschnitt 12.5 des Skriptes.

(i) Es gilt

$$\begin{aligned}\int_{-2}^{2} |t-1| \,\mathrm{d}t &= \int_{-2}^{1} |t-1| \,\mathrm{d}t + \int_{1}^{2} |t-1| \,\mathrm{d}t = \int_{-2}^{1} (1-t) \,\mathrm{d}t + \int_{1}^{2} (t-1) \,\mathrm{d}t \\ &= \left[t - \frac{t^2}{2}\right]_{t=-2}^{t=1} + \left[\frac{t^2}{2} - t\right]_{t=1}^{t=2} = 5.\end{aligned}$$

(ii) Es gilt nach der Substitutionsregel aus dem Abschnitt 12.12 des Skriptes

$$\begin{aligned}\int_{1}^{4} \frac{1}{\sqrt{t}(1+\sqrt{t})} \,\mathrm{d}t &= \int_{1}^{4} \underbrace{\frac{1}{2\sqrt{t}}}_{=g'(t)} \underbrace{\frac{2}{1+\underbrace{\sqrt{t}}_{=g(t)}}}_{=f(g(t))} \,\mathrm{d}t = \int_{g(1)}^{g(4)} f(x) \,\mathrm{d}x = \int_{1}^{2} \frac{2}{1+x} \,\mathrm{d}x \\ &= 2[\log(1+x)]_{x=1}^{2} = 2(\log(3) - \log(2)) = 2\log\left(\frac{3}{2}\right).\end{aligned}$$

(iii) Es gilt nach der Regel der partiellen Integration aus Abschnitt 12.11 des Skriptes

$$\begin{aligned}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{\frac{1}{2}t^2}_{=g(t)} \underbrace{\sin(2t)}_{=f'(t)} \,\mathrm{d}t &\overset{\text{P.I.}}{=} -\left[\frac{1}{2}\cos(2t) \cdot \frac{1}{2}t^2\right]_{t=0}^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{2}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} t\cos(2t) \,\mathrm{d}t \\ &= \frac{\pi^2}{16} + \frac{1}{2}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} t\cos(2t) \,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Das verbliebene Integral wird wieder partiell integriert zu

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{t}_{=g(t)} \underbrace{\cos(2t)}_{=f'(t)} \,\mathrm{d}t \overset{\text{P.I.}}{=} \left[t \cdot \frac{1}{2}\sin(2t)\right]_{t=0}^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{2}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin(2t) \,\mathrm{d}t = \frac{1}{4}[\cos(2t)]_{t=0}^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{1}{2}.$$

Insgesamt also

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}t^2 \sin(2t) \,\mathrm{d}t = \frac{\pi^2}{16} - \frac{1}{4}.$$

(iv) Es gilt nach der Substitutionsregel aus dem Abschnitt 12.12 des Skriptes

$$\begin{aligned}\int_{1}^{4} \arctan\left(\sqrt{\sqrt{t}-1}\right) \,\mathrm{d}t &\underset{\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}=2s}{\overset{t=s^2}{=}} \int_{1}^{2} 2s\arctan\left(\sqrt{s-1}\right) \,\mathrm{d}s \\ &\underset{\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}x}=2x}{\overset{s=x^2+1}{=}} 4\int_{0}^{1} (x^2+1)x\arctan(x) \,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Weiter gilt nach der Regel der partiellen Integration aus Abschnitt 12.12 des Skriptes

$$\int_{0}^{1} \underbrace{4(x^2+1)x}_{f'(x)} \underbrace{\arctan(x) \,\mathrm{d}x}_{g(x)} = \left[(x^4+2x^2)\arctan(x)\right]_{x=0}^{1} - \int_{0}^{1} \frac{x^4+2x^2}{1+x^2} \,\mathrm{d}x$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{3}{4}\pi - \int_0^1 \frac{(1+x^2)^2-1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{3}{4}\pi + \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x - \int_0^1 1+x^2\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{3}{4}\pi + [\arctan(x)]_{x=0}^{x=1} - \left[x+\frac{1}{3}x^3\right]_{x=0}^{x=1} = \pi - \frac{4}{3}.
\end{aligned}
$$

(v) Substitutionsregel liefert

$$\int_0^1 (1+2t)^3\,\mathrm{d}t \overset{t=\frac{s-1}{2}}{\underset{\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}=\frac{1}{2}}{=}} \frac{1}{2}\int_1^3 s^3\,\mathrm{d}s = \frac{1}{8}\left[s^4\right]_{s=1}^3 = \frac{81-1}{8} = 10.$$

(vi) Partielle Integration liefert

$$
\begin{aligned}
\int_1^e \underbrace{t}_{=f'(t)}\underbrace{\log(t)}_{=g(t)}\,\mathrm{d}t &= \left[\frac{t^2}{2}\log(t)\right]_{t=1}^{t=e} - \int_1^e \frac{t^2}{2}\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2}\int_1^e t\,\mathrm{d}t = \frac{e^2}{2} - \frac{1}{4}\left[t^2\right]_{t=1}^e \\
&= \frac{e^2+1}{4}.
\end{aligned}
$$

Aufgabe 4 (Tutorium):
Berechnen Sie die Integrale

(i) $\displaystyle\int_{(k-1)\pi}^{k\pi} |\sin(t)|dt$ für festes $k \in \mathbb{Z}$,

(ii) $\displaystyle\int_1^e \frac{1}{t(1+\log(t))}dt$,

(iii) $\displaystyle\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \arcsin(t)dt$

(iv) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} t\cos(t)dt$,

(v) $\displaystyle\int_1^2 \frac{t^3}{(1+t^2)^{\frac{3}{2}}}dt$

(vi) $\displaystyle\int_{\frac{\log(3)}{2}}^{\frac{\log(7)}{2}} \frac{1}{\sinh(t)\cosh(t)}dt.$

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 4:
Wir halten zunächst fest, dass jeder Integrand auf dem jeweiligen Integrationsintervall stetig ist und deshalb auch integrierbar nach Satz aus Abschnitt 12.5 des Skriptes.

(i) Die Nullstellenmenge des Sinuses ist $\pi\mathbb{Z}$ (siehe Abschnitt 10.2 des Skriptes). Also hat der Sinus für jedes $k \in \mathbb{Z}$ auf $[(k-1), k]$ keinen Vorzeichenwechsel (Zwischenwertsatz aus Abschnitt 9.9 des Skriptes). Folglich gilt

$$
\begin{aligned}
\int_{(k-1)\pi}^{k\pi} |\sin(t)|\,\mathrm{d}t &= \left|\int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \sin(t)\,\mathrm{d}t\right| = \left|-[\cos(t)]_{t=(k-1)\pi}^{t=k\pi}\right| \\
&= \left|(-1)^k - (-1)^{(k-1)}\right| = \left|(-1)^k + (-1)^k\right| = 2.
\end{aligned}
$$

(ii) Es gilt nach der Substitutionsregel aus dem Abschnitt 12.12 des Skriptes

$$
\begin{aligned}
\int_1^e \frac{1}{t(1+\log(t))}\,\mathrm{d}t &= \int_1^e \underbrace{\frac{1}{t}}_{=g'(t)} \underbrace{\frac{1}{1+\underbrace{\log(t)}_{g(t)}}}_{=f(g(t))}\,\mathrm{d}t = \int_{g(1)}^{g(e)} f(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \frac{1}{1+x}\,\mathrm{d}x = [\log(1+x)]_{x=0}^1 = \log(2).
\end{aligned}
$$

(iii) Es gilt nach der Regel der partiellen Integration aus Abschnitt 12.11 des Skriptes

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \arcsin(t)\,\mathrm{d}t &= \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \underbrace{1}_{=f'(t)}\underbrace{\arcsin(t)}_{=g(t)}\,\mathrm{d}t = [t\arcsin(t)]_{t=0}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} - \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} t\cdot\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\pi}{4} - \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Weiter gilt nach der Substitutionsregel aus Abschnitt 12.13 des Skriptes

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t &= \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \underbrace{2t}_{=g'(t)}\underbrace{\frac{1}{2\sqrt{1-\overbrace{t^2}^{=g(t)}}}}_{=f(g(t))}\,\mathrm{d}t = \int_{g(0)}^{g\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{2\sqrt{1-x}}\,\mathrm{d}x \\ &= -\left[\sqrt{1-x}\right]_{x=0}^{\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}.\end{aligned}$$

Insgesamt also

$$\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \arcsin(t)\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\pi}{4} - (1-\frac{1}{\sqrt{2}}) = \frac{\sqrt{2}\pi}{8} + \frac{\sqrt{2}}{2} - 1.$$

(iv) Die Technik des „Scharfen Hinsehens“™zusammen mit der Substitutionsregel liefert

$$\begin{aligned}\int_1^2 \frac{t^3}{(1+t^2)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}t &= \frac{1}{2}\int_1^2 \underbrace{\frac{\overbrace{t^2}^{=g(t)}}{(1+t^2)^{\frac{3}{2}}}}_{=f(g(t))}\underbrace{2t}_{=g'(t)}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_1^4 \frac{x}{(1+x)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}\int_1^4 \frac{1+x}{(1+x)^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{(1+x)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_1^4 \frac{1}{(1+x)^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{(1+x)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}x \\ &\overset{y=1+x}{\underset{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=1}{=}} \frac{1}{2}\int_2^5 y^{-\frac{1}{2}} - y^{-\frac{3}{2}}\,\mathrm{d}y = [\sqrt{y}]_{y=2}^5 + \left[\frac{1}{\sqrt{y}}\right]_{y=2}^5 \\ &= \sqrt{5}-\sqrt{2}+\frac{1}{\sqrt{5}}-\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{6\sqrt{5}}{5} - \frac{3\sqrt{2}}{2}.\end{aligned}$$

(v) Für den Integranden gilt per Definition

$$\frac{1}{\sinh(t)\cosh(t)} = \frac{4}{(e^t-e^{-t})(e^t+e^{-t})} = \frac{4}{e^{2t}-e^{-2t}} \qquad \forall t>0.$$

Daher bietet es sich an, die Substitutionsregel zu verwenden. Man erhält

$$\begin{aligned}\int_{\frac{\log(3)}{2}}^{\frac{\log(7)}{2}} \frac{1}{\sinh(t)\cosh(t)}\,\mathrm{d}t &= \int_{\frac{\log(3)}{2}}^{\frac{\log(7)}{2}} \frac{4}{e^{2t}-e^{-2t}}\,\mathrm{d}t \overset{t=\frac{\log(s)}{2}}{\underset{\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}=\frac{1}{2s}}{=}} 2\int_3^7 \frac{1}{s}\cdot\frac{1}{s-\frac{1}{s}}\,\mathrm{d}s = 2\int_3^7 \frac{1}{s^2-1}\,\mathrm{d}s \\ &= \int_3^7 \frac{2}{(s-1)(s+1)}\,\mathrm{d}s = \int_3^7 \frac{1}{s-1} - \frac{1}{s+1}\,\mathrm{d}s \\ &= [\log(s-1)-\log(s+1)]_{s=3}^{s=7} = \left[\log\left(\frac{s-1}{s+1}\right)\right]_{s=3}^{s=7} \\ &= \log\left(\frac{3}{4}\right) - \log\left(\frac{1}{2}\right) = \log\left(\frac{3}{2}\right).\end{aligned}$$

Aufgabe 5 (Übung):
Sei $f \in C^2([0,2])$, zeigen Sie, dass

$$\lim_{n\to\infty} n\int_0^1 f(x)(f(x+1/n)-f(x))dx = \tfrac{1}{2}(f(1)^2-f(0)^2)$$

gilt.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 5:
Wir zeigen zuerst, dass $n(f(x+1/n)-f(x))$ gleichmäßig gegen $f'(x)$ konvergiert. Mit dem Satz von Taylor 11.12 folgern wir

$$f(x+\tfrac{1}{n}) = f(x) + \tfrac{1}{n}f'(x) + \tfrac{1}{n^2}\tfrac{1}{2!}f''(\xi_n) \quad \xi_n \in [x, x+\tfrac{1}{n}]$$

Da $f \in C^2([0,2])$ folgt $f'' \in C([0,2])$ und somit ist $\sup_{[0,2]} |f''(x)| < \infty$. Damit schätzen wir ab

$$\lim_{n\to\infty} |n(f(x+1/n)-f(x)) - f'(x)| = \lim_{n\to\infty} |\tfrac{1}{n}\tfrac{1}{2!}f''(\xi_n)| \leq \tfrac{1}{2!}\sup_{x\in[0,2]}|f''(x)| \lim_{n\to\infty}\tfrac{1}{n} = 0.$$

Damit folgt, dass $n(f(x+1/n)-f(x))$ gleichmäßig gegen $f'(x)$ konvergiert. Da $f(x)$ stetig in x und unabhängig von n ist folgt, dass $n(f(x+1/n)-f(x))f(x)$ gleichmäßig gegen $f(x)f'(x)$ konvergiert und somit

$$\lim_{n\to\infty} n\int_0^1 f(x)(f(x+1/n)-f(x))dx = \int_0^1 f(x)f'(x)dx \underbrace{=}_{(f^2)'=2ff'} \left[\tfrac{1}{2}f^2(x)\right]_0^1 = \tfrac{1}{2}(f(1)^2 - f(0)^2).$$

Aufgabe 6 (Tutorium):

(i) Beweisen Sie den Mittelwertsatz der Integralrechnung: Ist $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und $g \in R([a.b])$ mit $g \geq 0$ oder $g \leq 0$, so existiert ein $\xi \in [a,b]$ mit

$$\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = f(\xi)\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Folgern Sie daraus: Ist $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig, so existiert ein $\xi \in [a,b]$ mit

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = f(\xi)(b-a).$$

(ii) Sei $a > 0$ und $f\colon [-a,a] \to \mathbb{R}$ stetig. Zeigen Sie: Ist f gerade, also $f(-x) = f(x)$ für alle $x \in [-a,a]$, so gilt

$$\int_{-a}^a f(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Ist f ungerade, also $f(-x) = -f(x)$ für alle $x \in [-a,a]$, so gilt

$$\int_{-a}^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 6:

(i) Da f stetig auf dem kompakten Intervall $[a,b]$ ist, nimmt es sein Maximum M und sein Minimum m an. Nach Satz 12.3 (1) gilt also (unter der Annahme $g \geq 0$, der andere Fall funktioniert analog)

$$m\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x \leq M\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Also existiert ein $K \in [m,M]$ mit

$$\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = K\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Zu diesem K existiert nach dem Zwischenwertsatz ein $\xi \in [a,b]$ mit $K = f(\xi)$, womit die erste Behauptung folgt. Setzt man $g \equiv 1$, so folgt die zweite Behauptung mit $\int_a^b 1\,\mathrm{d}x = b-a$.

(ii) Nach Satz 11.6 (1) gilt

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-a}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Für das erste Integral nutzen wir die Substitution $y(x) = -x$. In der Schreibweise der Merkregel aus der Vorlesung gilt nun $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -1$, also $\mathrm{d}x = -\,\mathrm{d}y$. Außerdem gilt $y(-a) = a$, $y(0) = 0$. Nach der Substitutionsregel folgt demnach

$$\int_{-a}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{a}^{0} f(-y)(-1)\,\mathrm{d}y = \int_{0}^{a} f(-y)\,\mathrm{d}y = \begin{cases} \int_0^a f(y)\,\mathrm{d}y, & f \text{ gerade}, \\ -\int_0^a f(y)\,\mathrm{d}y, & f \text{ ungerade}. \end{cases}$$

Dies liefert die Behauptung.