

12. Übungsblatt

Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Physik

Wintersemester 2023/24

25. Januar 2024

Behandelt am 1. Februar 2024

Aufgabe 1 (Übung, gedämpfter harmonischer Oszillator):

In dieser Aufgabe möchten wir die gedämpfte Schwingung eines Federpendels genauer betrachten. Berücksichtigt man neben dem Einfluss der Rückstellkraft ($-Du$, mit der Federkonstanten $D > 0$) auch die Reibung ($-\mu u'$, für $\mu > 0$), so ergibt sich für die zugehörige Bewegungsgleichung mit Anfangsauslenkung $x_0 \in \mathbb{R}$ und Anfangsgeschwindigkeit 0 das folgende Anfangswertproblem

$$(1) \quad \begin{cases} mu''(t) + \mu u'(t) + Du(t) = 0, \\ u(0) = x_0, \quad u'(0) = 0 \end{cases}$$

wobei $m > 0$ die Masse des Massepunktes bezeichnet. Bestimmen Sie die Lösung von (1) und bestimmen Sie μ so, dass das Pendel nicht über die Ruhelage hinausschwingt. Den Fall für das kleinste μ , für welches dies erfüllt ist, bezeichnet man als aperiodischen Grenzfall, bei allen weiteren solchen μ spricht man vom Kriechfall.

Aufgabe 2 (Tutorium):

Bestimmen Sie jeweils die maximale Lösung der folgenden Anfangswertprobleme.

(a) $y'(x) = -\tan(x)y(x) + \cos(x)$, $y(0) = 1$,

(b) $y'(x) = -\frac{2x}{1-x^2}y(x) + 1 - x$, $y(0) = 2$.

Aufgabe 3 (Übung):

Bestimmen Sie jeweils die maximale Lösung der folgenden Anfangswertprobleme.

(a) $y'(x) = -\frac{x^2}{y(x)^3}$ mit $y(0) = -1$ bzw. $y(0) = 1$,

(b) $y'(x) = \frac{8\sqrt{y(x)}}{1+x^2}$, $y(1) = \pi^2$,

(c) $y'(x) = \sqrt{1-y(x)^2} \cos(x)$, $y(0) = 0$,

Aufgabe 4 (Tutorium):

Bestimmen Sie jeweils die maximale Lösung der folgenden Anfangswertprobleme.

(a) $y''(x) + 2y'(x) + y(x) = e^{2x}$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

(b) $y''(x) - 2y'(x) + 2y(x) = e^x \cos(x)$, $y(\frac{\pi}{2}) = 0$, $y'(\frac{\pi}{2}) = 0$.

Aufgabe 5 (Übung, Gammafunktion):

Für $s > 0$ definieren wir $\Gamma(s) := \int_0^\infty x^{s-1} e^{-x} dx$

- (a) Zeigen Sie, dass das uneigentliche Integral $\Gamma(s)$ für alle $s > 0$ konvergiert.
- (b) Zeigen Sie, dass $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$ für alle $s > 0$ gilt.
Hinweis: partielle Integration.
- (c) Zeigen Sie, dass $\Gamma(n) = (n-1)!$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.
- (d) Zeigen Sie, dass $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ gilt.
Hinweis: Es gilt $\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, wie wir in HM2 zeigen werden.

Aufgabe 6 (Tutorium):

Zeigen Sie oder widerlegen Sie durch ein Gegenbeispiel:

- (a) Seien $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar, $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$ und y die maximale Lösung von

$$y' = f(y), \quad y(x_0) = y_0.$$

Bemerkung: Dieses Anfangswertproblem ist eindeutig lösbar.

- (i) y ist 2-mal stetig differenzierbar.
 - (ii) y ist auf ganz $\mathbb{R}$ definiert.
 - (iii) y ist monoton.
- (b) Sei $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ und $g: (0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ stetige Funktionen.
 - (i) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0 \implies \int_0^\infty f(x) dx$ konvergiert,
 - (ii) $\int_0^\infty f(x) dx$ konvergiert $\implies \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$,
 - (iii) $\int_0^1 g(x)^2 dx$ konvergiert $\implies \int_0^1 g(x) dx$ konvergiert,
 - (iv) $\int_0^1 g(x) dx$ konvergiert $\implies \int_0^1 g(x)^2 dx$ konvergiert.