Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Analysis
Priv.-Doz. Dr. Gerd Herzog
M.Sc. Niklas Knobel
M.Sc. Sebastian Ohrem

Lösungsvorschlag zum 12. Übungsblatt

Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Physik

Wintersemester 2023/24

1. Februar 2024

Aufgabe 1 (Übung, gedämpfter harmonischer Oszillator):
In dieser Aufgabe möchten wir die gedämpfte Schwingung eines Federpendels genauer betrachten. Berücksichtigt man neben dem Einfluss der Rückstellkraft ($-Du$, mit der Federkonstanten $D > 0$) auch die Reibung ($-\mu u'$, für $\mu > 0$), so ergibt sich für die zugehörige Bewegungsgleichung mit Anfangsauslenkung $x_0 \in \mathbb{R}$ und Anfangsgeschwindigkeit 0 das folgende Anfangswertproblem

$$\begin{cases} mu''(t) + \mu u'(t) + Du(t) = 0, \\ u(0) = x_0, \quad u'(0) = 0 \end{cases} \tag{1}$$

wobei $m > 0$ die Masse des Massepunktes bezeichnet. Bestimmen Sie die Lösung von (1) und bestimmen Sie μ so, dass das Pendel nicht über die Ruhelage hinausschwingt. Den Fall für das kleinste μ, für welches dies erfüllt ist, bezeichnet man als aperiodischen Grenzfall, bei allen weiteren solchen μ spricht man vom Kriechfall.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 1:
Wir teilen die Differentialgleichung durch m und erhalten so $u''(t) + \frac{\mu}{m}u'(t) + \frac{D}{m}u(t) = 0$. Dies ist eine Differentialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten. Ihr charakteristisches Polynom ist

$$p(\lambda) = \lambda^2 + \frac{\mu}{m}\lambda + \frac{D}{m} = \left(\lambda + \frac{\mu}{2m}\right)^2 + \left(\frac{D}{m} - \frac{\mu^2}{4m^2}\right)$$

mit Nullstellen $\lambda_{1,2} = -\frac{\mu}{2m} \pm \sqrt{\frac{\mu^2}{4m^2} - \frac{D}{m}}$. Wir unterscheiden nun die 3 Fälle, in denen der Term unter der Wurzel positiv, 0, oder negativ ist, und kürzen $\delta := \frac{\mu}{2m}$ ab.

- *Fall 1:* $\delta^2 - \frac{D}{m} = 0$. Das charakteristische Polynom hat $-\delta$ als doppelte Nullstelle, und damit bilden nach Vorlesung die Funktionen

  $$u_1(t) = \mathrm{e}^{-\delta t}, \qquad u_2(t) = t\mathrm{e}^{-\delta t}$$

  ein Fundamentalsystem der Differentialgleichung. Somit ist unsere Lösung $u(t)$ gegeben durch

  $$u(t) = \alpha u_1(t) + \beta u_2(t)$$

  für geeignete $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Wir lösen auf

  $$u(0) = x_0, u'(x) = 0 \iff \alpha = x_0, -\alpha\delta + \beta = 0 \iff \alpha = x_0, \beta = \delta x_0$$

  und erhalten daraus die Lösung $u(t) = x_0(1 + \delta t)\mathrm{e}^{-\delta t}$.

  Es gilt $u(t) \to 0$ für $t \to \infty$ und u wechselt nicht das Vorzeichen, das heißt, das Pendel schwingt nicht über die Ruhelage hinaus, es »kriecht« in die Ruhelage. Diesen Fall bezeichnet man als aperiodischen Grenzfall. Wir merken an, dass hier $\mu = \frac{\sqrt{Dm}}{2}$ ist.

- *Fall 2:* $\delta^2 - \frac{D}{m} > 0$. Wir kürzen $\sigma := \sqrt{\delta^2 - \frac{D}{m}}$ ab. Nach Vorlesung bilden die Funktionen

  $$u_1(t) = \mathrm{e}^{-(\delta-\sigma)t} \qquad u_2(t) = \mathrm{e}^{-(\delta+\sigma)t}$$

ein Fundamentalsystem der Differentialgleichung, und es gilt wieder die Anfangsbedingungen in $u(t) = \alpha u_1(t) + \beta u_2(t)$ einzusetzen und aufzulösen:

$$\begin{aligned} u(0) = x_0, u'(0) = 0 &\iff \alpha + \beta = x_0, -\alpha(\delta - \sigma) - \beta(\delta + \sigma) = 0 \\ &\iff \alpha + \beta = x_0, \sigma(\alpha - \beta) = \delta x_0 \\ &\iff \alpha = \frac{x_0}{2}\left(1 + \frac{\delta}{\sigma}\right), \beta = \frac{x_0}{2}\left(1 - \frac{\delta}{\sigma}\right) \end{aligned}$$

Somit ist die Lösung des Anfangswertproblems gegeben durch

$$\begin{aligned} u(t) &= \frac{x_0}{2\sigma}\Big((\delta + \sigma)\mathrm{e}^{-(\delta-\sigma)t} - (\delta - \sigma)\mathrm{e}^{-(\delta+\sigma)t}\Big) \\ &= x_0\mathrm{e}^{-\delta t}\left(\cosh(\sigma t) + \frac{\delta}{\sigma}\sinh(\sigma t)\right) \end{aligned}$$

Wir sehen, dass wieder u das Vorzeichen nicht wechselt, für $\delta^2 - \frac{D}{m} > 0$, also für $\mu > \frac{\sqrt{Dm}}{2}$ sind wir im »Kriechfall«.

- *Fall 3:* $\delta^2 - \frac{D}{m} < 0$. Wir kürzen $\sigma := \sqrt{\frac{D}{m} - \delta^2}$ ab. Nach Vorlesung ist die allgemeine Lösung der Differentialgleichung gegeben durch $u(t) = \alpha u_1(t) + \beta u_2(t)$ mit

  $$u_1(t) = \mathrm{e}^{-\delta t}\cos(\sigma t), \qquad u_2(t) = \mathrm{e}^{-\delta t}\sin(\sigma t), \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

  Einsetzen der Anfangsbedingungen liefert

  $$u(0) = x_0, u'(0) = 0 \iff \alpha = x_0, -\alpha\delta + \beta\sigma = 0 \iff \alpha = x_0, \beta = \frac{\delta x_0}{\sigma},$$

  also

  $$u(t) = x_0\mathrm{e}^{-\delta t}\left(\cos(\sigma t) + \frac{\delta}{\sigma}\sin(\sigma t)\right).$$

  Der Term $\mathrm{e}^{-\delta t}$sorgt also dafür, dass u gegen 0 geht für $t \to \infty$, also das Pendel gegen die Ruhelage strebt, aber es schwingt unendlich oft über die Ruhelage hinaus »Schwingfall«.

Bemerkung: Man sieht hier eine Ähnlichkeit zwischen den Lösungsformeln der Fälle 2 und 3. Diese schauen wir uns etwas genauer an. Wenn wir in der Lösungsformel von Fall 3 σ durch $\mathrm{i}\sigma$ ersetzen, erhalten wir

$$x_0\mathrm{e}^{-\delta t}\left(\cos(\mathrm{i}\sigma t) + \frac{\delta}{\mathrm{i}\sigma}\sin(\mathrm{i}\sigma t)\right) = x_0\mathrm{e}^{-\delta t}\left(\cosh(\sigma t) + \frac{\delta}{\sigma}\sinh(\sigma t)\right)$$

gerade die Lösungsformel aus Fall 2. Die Substitution $\sigma \rightsquigarrow \mathrm{i}\sigma$ kommt daher, dass die Wurzeln aus $\delta^2 - \frac{D}{m}$ gerade gleich i mal den Wurzeln aus $\frac{D}{m} - \delta^2$ sind.

Diese Bemerkung stimmt natürlich genauso, wenn man i durch $-\mathrm{i}$ ersetzt, und die verwendeten Formeln $\cos(\mathrm{i}z) = \cosh(z), \sin(\mathrm{i}z) = \mathrm{i}\sinh(z)$ kann man direkt den Definitionen von $\sin, \cos, \sinh, \cosh$ ablesen.

Aufgabe 2 (Tutorium):
Bestimmen Sie jeweils die maximale Lösung der folgenden Anfangswertprobleme.

(a) $y'(x) = -\tan(x)y(x) + \cos(x)$, $y(0) = 1$,

(b) $y'(x) = -\dfrac{2x}{1-x^2}y(x) + 1 - x$, $y(0) = 2$.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 2:

(a) Wir betrachten $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, da dies das maximale Intervall ist, welches 0 enthält und auf dem tan definiert ist. In Notation der Vorlesung (siehe Abschnitt 13.2) sind $a(x) = -\tan(x)$ und $b(x) = \cos(x)$ gegeben.

Eine Stammfunktion von $x \mapsto -\tan(x)$ ist gegeben durch $A(x) = \log(\cos(x))$, und damit die allgemeine Lösung des homogenen Problems durch $y(x) = c\mathrm{e}^{A(x)} = c\cos(x)$. Um eine Lösung des inhomogenen Problems zu finden, machen wir den Ansatz $y(x) = c(x)\cos(x)$. Dann gelten

$$y'(x) = c'(x)\cos(x) - c(x)\sin(x) \stackrel{!}{=} -\tan(x)y(x) + \cos(x) \iff c'(x) = 1$$

Also ist die Lösung des Problems gegeben durch $y(x) = (x+c)\cos(x)$ für geeignetes $c \in \mathbb{R}$. Einsetzen der Anfangsbedingung $y(0) \stackrel{!}{=} 1$ liefert $c = 1$. Wir haben also $y(x) = (x+1)\cos(x)$ auf $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ als maximale Lösung des Anfangswertproblems.

(b) Das maximale Intervall, für das die Differentialgleichung definiert ist und welches 0 enthält, ist $(-1, 1)$. Es sind $a(x) = -\frac{2x}{1-x^2}$ gegeben mit Stammfunktion $A(x) = \log(1-x^2)$, und $b(x) = 1 - x$. Somit ist die allgemeine Lösung des homogenen Problems gegeben durch $y(x) = c\mathrm{e}^{A(x)} = c(1 - x^2)$. Um die Lösung des Anfangswertproblems zu finden, verwenden wir zur Abwechslung die Duhamel'sche Formel (siehe unten), und berechnen:

$$\begin{aligned}
y(x) &= \mathrm{e}^{A(x)}\left(\mathrm{e}^{-A(0)}y(0) + \int_0^x \mathrm{e}^{-A(s)}y(s)\,\mathrm{d}s\right) \\
&= (1-x^2)\left(2 + \int_0^x \frac{1-s}{1-s^2}\,\mathrm{d}s\right) \\
&= (1-x^2)(2 + [\log(1+s)]_0^x) \\
&= (1-x^2)(2 + \log(1+x)),
\end{aligned}$$

was die maximale Lösung des Anfangswertproblems mit Definitionsbereich $(-1, 1)$ ist.

Bemerkung: Für einen alternativen Lösungsweg leiten wir die "Variation der Konstanten Formel", auch Duhamel's Formel genannt, her. Wir betrachten allgemein das Anfangswertproblem

$$y' = a(t)y + b(t), \quad y(t_0) = y_0$$

mit $a, b\colon J \to \mathbb{R}$ stetig. Wir behaupten, dass die Lösung gegeben ist durch

$$\begin{aligned}
y(t) &= \exp\left(\int_{t_0}^t a(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right)y_0 + \int_{t_0}^t \exp\left(\int_s^t a(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right)b(s)\,\mathrm{d}s \\
&= \mathrm{e}^{A(t)-A(t_0)}y_0 + \int_{t_0}^t \mathrm{e}^{A(t)-A(s)}b(s)\,\mathrm{d}s \\
&= \mathrm{e}^{A(t)}\left(\mathrm{e}^{-A(t_0)}y_0 + \int_{t_0}^t \mathrm{e}^{-A(s)}b(s)\,\mathrm{d}s\right)
\end{aligned}$$

wobei A eine Stammfunktion von a ist. Diese Formel lässt sich wie folgt aus dem Variation-der-Konstanten-Ansatz

$$y(t) = \mathrm{e}^{A(t)}c(t)$$

wie folgt herleiten. Einsetzen des Ansatzes liefert

$$y'(t) = \mathrm{e}^{A(t)}A'(t)c(t) + \mathrm{e}^{A(t)}c'(t) = a(t)y(t) + \mathrm{e}^{A(t)}c'(t) \stackrel{!}{=} a(t)y(t) + b(t),$$

also

$$c'(t) = \mathrm{e}^{-A(t)}b(t) \implies c(t) = c_0 + \int_{t_0}^t \mathrm{e}^{-A(s)}b(s)\,\mathrm{d}s$$

Durch einsetzen des Anfangswertes findet man $c_0 = \mathrm{e}^{-A(t_0)} y_0$ und damit

$$y(t) = \mathrm{e}^{A(t)} c(t) = \mathrm{e}^{A(t)} \left(\mathrm{e}^{-A(t_0)} y_0 + \int_{t_0}^{t} \mathrm{e}^{-A(s)} b(s) \, \mathrm{d}s \right).$$

Wer sich die Formel merken will, kann das vielleicht wie folgt machen: Man hat einen Anteil vom Anfangswert, und einen Anteil von der rechten Seite (als Integral). Die Formel ist also $y(t) = ?y_0 + \int_{t_0}^{t} ?b(s) \, \mathrm{d}s$. Dabei sorgen die "?"-Terme dafür, dass die Terme y_0 bzw. $b(s)$, die zur Zeit t_0 bzw. s entstanden sind, zur aktuellen Zeit t gebracht werden. Dabei verhält sich die Größe

$$t \mapsto c\mathrm{e}^{A(t)}$$

"sinnvoll mit der Zeit", was formal bedeutet dass hier die Lösung der homogenen Gleichung $y' = a(t)y$ steht. Soll diese Größe zur Zeit s gerade $b(s)$ sein, müssen wir $c = \mathrm{e}^{-A(s)} b(s)$, sodass sie zur Zeit t $\mathrm{e}^{A(t)-A(s)} b(s)$ liest. Also ersetzen wir das Fragezeichen durch $\mathrm{e}^{A(t)-A(s)}$ (bzw. $\mathrm{e}^{A(t)-A(t_0)}$).

Aufgabe 3 (Übung):
Bestimmen Sie jeweils die maximale Lösung der folgenden Anfangswertprobleme.

(a) $y'(x) = -\dfrac{x^2}{y(x)^3}$ mit $y(0) = -1$ bzw. $y(0) = 1$,

(b) $y'(x) = \dfrac{8\sqrt{y(x)}}{1 + x^2}$, $y(1) = \pi^2$,

(c) $y'(x) = \sqrt{1 - y(x)^2} \cos(x)$, $y(0) = 0$,

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 3:
Sämtliche DGL dieser Aufgabe sind mit der Methode "Trennung der Variablen" behandelbar.

(a) Wir berechnen:

$$y'(x) = \frac{-x^2}{y(x)^3}, y(0) = 1 \implies y(x)^3 y'(x) = -x^2, y(0) = 1 \implies \left[\tfrac{1}{4}s^4\right]_{y(0)}^{y(x)} = \left[-\tfrac{1}{3}t^3\right]_0^x \implies y(x)^4 = 1 - \tfrac{4}{3}x^3.$$

In der DGL $y'(x) = -\frac{x^2}{y(x)^3} = f(x)g(y(x))$ ist der sinnvolle Definitionsbereich von g gleich $(0, \infty)$, da dies das maximale Intervall ist, welches das Anfangsdatum $y(0) = 1$ enthält und auf dem $\frac{1}{y^3}$ erklärbar ist. Umgangssprachlich sind wir an Lösungen y mit $y(x) \in (0, \infty)$ interessiert. Unter dieser Zusatzvoraussetzung ist

$$y(x)^4 = 1 - \tfrac{4}{3}x^3$$

genau für $x \in (-\infty, \sqrt[3]{\frac{3}{4}})$ nach $y(x)$ auflösbar, und es gilt

$$y(x) = \sqrt[4]{1 - \frac{4}{3}x^3}$$

für $x \in (-\infty, \sqrt[3]{\frac{3}{4}})$. Nach Vorlesung wissen wir, dass das so bestimmte y das Anfangswertproblem löst. Es ist die Maximale Lösung, da wegen $y(x) \to 0$ für $x \to \sqrt[3]{\frac{3}{4}}$ man f nicht auf ein größeres Intervall so stetig fortsetzen kann, dass die rechte Seite der Differentialgleichung erklärt ist.

Analog zu $y(0) = 1$ zeigt man, dass für $y(0) = -1$ die Lösung des AWP $y(x) = -\sqrt[4]{1 - \frac{4}{3}x^3}$ lautet mit maximalem Definitionsbereich ($x \in \left(-\infty, \sqrt[3]{\frac{3}{4}}\right)$).

(b) Zunächst halten wir fest, dass wir nach $y(x) > 0$ auflösen müssen. Nun gilt:

$$y'(x) = \frac{8\sqrt{y(x)}}{1+x^2}, y(1) = \pi^2 \implies \frac{y'(x)}{2\sqrt{y(x)}} = \frac{4}{1+x^2}, y(1) = \pi^2 \implies \left[\sqrt{s}\right]_{\pi^2}^{y(x)} = [4\arctan(t)]_1^x,$$

also

$$\sqrt{y(x)} - \pi = 4\arctan(x) - \pi.$$

Genau für $x > 0$ ist dies nach $y(x)$ auflösbar, also ist die Lösung gegeben durch

$$y(x) = 16\arctan(x)^2$$

für $x \in (0, \infty)$. Nun fragen wir uns, was wir für $x \leq 0$ machen, da bei 0 im Gegensatz zu Teil (a) keine Definitionsprobleme auftreten. Wir können hier tatsächlich mit 0 fortsetzen und erhalten

$$y(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ 16\arctan(x)^2, & x > 0, \end{cases}$$

was (nachrechnen!) differenzierbar ist, offenbar die Differentialgleichung auf $(-\infty, 0]$ löst, und nach der Rechnung oben und Vorlesung die Differentialgleichung auf $(0, \infty)$ löst mit richtigem Anfangswert. Somit haben wir die auf $\mathbb{R}$ definierte maximale Lösung gefunden.

(c) Wir berechnen:

$$y'(x) = \sqrt{1-y(x)^2}\cos(x), y(0) = 0 \implies \frac{y'(x)}{\sqrt{1-y(x)^2}} = \cos(x), y(0) = 0$$
$$\implies [\arcsin(s)]_0^{y(x)} = [\sin(t)]_0^x \implies \arcsin(y(x)) = \sin(x)$$

Die eindeutige Lösung hiervon existiert für alle $x \in \mathbb{R}$ (wegen $\sin(x) \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$) und ist gegeben durch $y(x) = \sin(\sin(x))$. Nach Vorlesung ist dies eine Lösung des Anfangswertproblems, und offensichtlich ist es eine maximale Lösung.

Aufgabe 4 (Tutorium):
Bestimmen Sie jeweils die maximale Lösung der folgenden Anfangswertprobleme.

(a) $y''(x) + 2y'(x) + y(x) = \mathrm{e}^{2x}, \quad y(0) = 1,\ y'(0) = 0.$

(b) $y''(x) - 2y'(x) + 2y(x) = \mathrm{e}^x\cos(x), \quad y(\frac{\pi}{2}) = 0,\ y'(\frac{\pi}{2}) = 0.$

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 4:

(a) Bei der Differentialgleichung handelt es sich um eine inhomogene lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung. Zunächst bestimmen wir die Nullstellen des charakteristischen Polynoms.

$$\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0 \Rightarrow \lambda = -1 \pm \sqrt{1-1} = -1$$

Nach Satz 12.4 der Vorlesung ist also

$$y_h(x) = c_1\mathrm{e}^{-x} + c_2x\mathrm{e}^{-x}$$

die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung

$$y''(x) + 2y'(x) + y(x) = 0.$$

Unsere Inhomogenität ist in der Form, die in der Vorlesung (Abschnitt 13.4) diskutiert wurde, wobei $m = 0$, $\alpha = 2$ und $\beta = 0$ sind. Da 2 keine Nullstelle des charakteristischen Polynoms ist, machen wir den Ansatz

$$y_p(x) = A\mathrm{e}^{2x}$$

für eine spezielle Lösung der Differentialgleichung. Die Ableitungen sind durch

$$y_p'(x) = 2A\mathrm{e}^{2x},$$

$$y_p''(x) = 4A\mathrm{e}^{2x}$$

gegeben. Einsetzen in die Differentialgleichung liefert

$$y_p''(x) + 2y_p'(x) + y_p(x) = 4A\mathrm{e}^{2x} + 2 \cdot 2A\mathrm{e}^{2x} + A\mathrm{e}^{2x} = 9A\mathrm{e}^{2x} \stackrel{!}{=} \mathrm{e}^{2x} \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

Diese Gleichung ist für $A = \frac{1}{9}$ erfüllt. Also ist

$$y_p(x) = \frac{1}{9}\mathrm{e}^{2x}$$

eine spezielle Lösung der Differentialgleichung und die maximale Lösung des Anfangswertproblems ist durch

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = c_1\mathrm{e}^{-x} + c_2 x\mathrm{e}^{-x} + \frac{1}{9}\mathrm{e}^{2x}$$

gegeben (und auf ganz $\mathbb{R}$ definiert), wobei die Konstanten c_1 und c_2 so gewählt werden müssen, dass die Anfangswertbedingungen erfüllt sind. Es ist

$$y(0) = c_1 + \frac{1}{9} \stackrel{!}{=} y_0 = 1 \Rightarrow c_1 = \frac{8}{9}$$

und wegen

$$y'(x) = -\frac{8}{9}\mathrm{e}^{-x} - c_2 x\mathrm{e}^{-x} + c_2\mathrm{e}^{-x} + \frac{2}{9}\mathrm{e}^{2x}$$

ist

$$y'(0) = -\frac{8}{9} + c_2 + \frac{2}{9} = c_2 - \frac{6}{9} \stackrel{!}{=} y_1 = 0 \Rightarrow c_2 = \frac{6}{9}$$

und die maximale Lösung des Anfangswertproblems lautet

$$y(x) = \frac{8}{9}\mathrm{e}^{-x} + \frac{6}{9}x\mathrm{e}^{x} + \frac{1}{9}\mathrm{e}^{2x}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

(b) Das charakteristische Polynom ist gegeben durch $p(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 2$, welche die Nullstellen $1 \pm \mathrm{i}$ besitzt. Die allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung ist demnach gegeben durch

$$y_h(x) = c_1\mathrm{e}^{x}\cos(x) + c_2\mathrm{e}^{x}\sin(x).$$

Die rechte Seite hat die Form $q_m(x)\mathrm{e}^{\alpha x}\cos(\beta x)$ mit $\alpha = 0$, $\beta = 1$, $q_m(x) = 1$, $m = 0$. Da $\alpha + \mathrm{i}\beta$ somit eine Nullstelle des charakteristischen Polynoms ist, lautet der Ansatz für die partikuläre Lösung

$$y_p(x) = x\mathrm{e}^{x}(A\cos(x) + B\sin(x)).$$

Wir setzen y_p in die Differentialgleichung ein und lösen nach A, B auf. Um die Rechnung zu vereinfachen, schreiben wir $y_p(x) = xf(x)$ und nutzen, dass f die homogene Differentialgleichung löst:

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^{x}\cos(x) &\stackrel{!}{=} y_p''(x) - 2y_p'(x) + 2y(x) \\
&= xf''(x) + 2f'(x) - 2xf'(x) - 2f(x) + 2xf(x) \\
&= x(f''(x) - 2f'(x) + 2f(x)) + 2(f'(x) - f(x)) \\
&= 2(f'(x) - f(x)) \\
&= 2\mathrm{e}^{x}(-A\sin(x) + B\cos(x))
\end{aligned}$$

Somit gelten $A = 0$, $B = \frac{1}{2}$. Die allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung ist also gegeben durch

$$y(x) = c_1\mathrm{e}^{x}\cos(x) + c_2\mathrm{e}^{x}\sin(x) + \frac{1}{2}x\mathrm{e}^{x}\sin(x).$$

Einsetzen der Anfangswerte liefert

$$0 = y(\frac{\pi}{2}) = c_2\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}} + \frac{\pi}{4}\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}},$$

also $c_2 = -\frac{\pi}{4}$, und wegen

$$y'(x) = \mathrm{e}^x \sin(x)\Big(-c_1 - \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\Big) + \mathrm{e}^x \cos(x)\Big(c_1 - \frac{\pi}{4}\Big) + \frac{1}{2}x\mathrm{e}^x(\sin(x) + \cos(x))$$

folgt schließlich

$$0 = y'(\frac{\pi}{2}) = \mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}}\Big(-c_1 - \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\Big) + \frac{\pi}{4}\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}},$$

also $c_1 = \frac{1}{2}$. Die Lösung des Anfangswertproblems ist demnach gegeben durch

$$y(x) = \frac{1}{2}\mathrm{e}^x \cos(x) - \frac{\pi}{4}\mathrm{e}^x \sin(x) + \frac{1}{2}x\mathrm{e}^x \sin(x) = \frac{\mathrm{e}^x}{2}\Big(\Big(x - \frac{\pi}{2}\Big)\sin(x) + \cos(x)\Big)$$

für alle $x \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 5 (Übung, Gammafunktion):

Für $s > 0$ definieren wir $\Gamma(s) := \displaystyle\int_0^\infty x^{s-1}\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$

(a) Zeigen Sie, dass das uneigentliche Integral $\Gamma(s)$ für alle $s > 0$ konvergiert.

(b) Zeigen Sie, dass $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$ für alle $s > 0$ gilt.
Hinweis: partielle Integration.

(c) Zeigen Sie, dass $\Gamma(n) = (n-1)!$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

(d) Zeigen Sie, dass $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ gilt.
Hinweis: Es gilt $\int_0^\infty \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, wie wir in HM2 zeigen werden.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 5:

(a) Für $x \leq 1$ ist $\left|x^{s-1}\mathrm{e}^{-x}\right| \leq x^{s-1}$ und damit nach dem Majorantenkriterium und Beispiel (3) in Abschnitt 14.1 das Integral $\int_0^1 x^{s-1}\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$ konvergent.

Für $x \geq 1$ unterscheiden wir zwischen $s \leq 1$ und $s > 1$. Für $s \leq 1$ ist $\left|x^{s-1}\mathrm{e}^{-x}\right| \leq \mathrm{e}^{-x}$ und damit $\int_1^\infty x^{s-1}\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$ konvergent. Für $s > 1$ müssen wir argumentieren, dass x^{s-1} langsamer wächst als e^x: Für $z \in \mathbb{R}$ gilt $z \leq \mathrm{e}^z$, und damit schätzen wir für $\varepsilon > 0$ ab:

$$\left|x^{s-1}\mathrm{e}^{-}x\right| = \left(\tfrac{1}{\varepsilon}\varepsilon x\right)^{s-1}\mathrm{e}^{-x} \leq \left(\tfrac{1}{\varepsilon}\mathrm{e}^{\varepsilon x}\right)^{s-1}\mathrm{e}^{-x} = \varepsilon^{1-s}\mathrm{e}^{((s-1)\varepsilon-1)x}.$$

Wählen wir nun $\varepsilon < \frac{1}{s-1}$, so haben wir oben eine integrierbare Majorante für $\int_1^\infty x^{s-1}\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$ gefunden.

(b) Wie im Hinweis verwenden wir partielle Integration, was zunächst nur für eigentliche Integrale erlaubt ist. Seien also $0 < a < b < \infty$ und $s > -1$. Dann ist

$$\int_a^b x^s\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = \left[-x^s\mathrm{e}^{-x}\right]_a^b - \int_a^b -sx^{s-1}\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$$

und damit für $a \to 0$ und $b \to \infty$:

$$\Gamma(s+1) = \lim_{a\to 0}\lim_{b\to\infty}\int_a^b x^s\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = \lim_{a\to 0} a^s\mathrm{e}^{-a} - \lim_{b\to\infty} b^s\mathrm{e}^{-b} + s\lim_{a\to 0}\lim_{b\to\infty}\int_a^b x^{s-1}\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = s\Gamma(s)$$

wobei wegen $s > 0$ und der Überlegung oben die Randterme im Grenzwert wegfallen.

(c) Mit Teil (b) und Induktion lässt sich zeigen, dass $\Gamma(n) = (n-1)!\Gamma(1)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Wegen

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = \lim_{b\to\infty}\int_0^b \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = \lim_{b\to\infty} 1 - \mathrm{e}^{-b} = 1$$

folgt die Behauptung.

(d) Wir substituieren $x = y^2$ und erhalten so ($\mathrm{d}x = 2y\,\mathrm{d}y$), wobei analog zu (b) die Substitutionsregel nur für eigentliche Integrale bekannt ist:

$$\Gamma(\tfrac{1}{2}) = \lim_{a\to 0}\lim_{b\to\infty}\int_a^b \frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = \lim_{a\to 0}\lim_{b\to\infty}\int_{\sqrt{a}}^{\sqrt{b}} 2\mathrm{e}^{-y^2}\,\mathrm{d}y = 2\int_0^\infty \mathrm{e}^{-y^2}\,\mathrm{d}y \overset{\text{Hinweis}}{=} \sqrt{\pi}.$$

Anmerkung: Die hier verwendete Schreibweise für uneigentliche Integrale entspricht der aus der Vorlesung, denn es gilt definiert für beliebiges $c \in (\alpha, \beta)$

$$\begin{aligned}\lim_{a\to\alpha}\lim_{b\to\beta}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x &= \lim_{a\to\alpha}\lim_{b\to\beta}\left(\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x\right) = \lim_{a\to\alpha}\left(\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \lim_{b\to\beta}\int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x\right)\\ &= \lim_{a\to\alpha}\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \lim_{b\to\beta}\int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x =: \int_\alpha^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^\beta f(x)\,\mathrm{d}x =: \int_\alpha^\beta f(x)\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

wobei bei jeder Gleichheit die Grenzwerte auf der rechten Seite genau dann existieren, wenn die auf der linken Seite existieren.

Aufgabe 6 (Tutorium):
Zeigen Sie oder widerlegen Sie durch ein Gegenbeispiel:

(a) Seien $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar, $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$ und y die maximale Lösung von

$$y' = f(y), \quad y(x_0) = y_0.$$

Bemerkung: Dieses Anfangswertproblem ist eindeutig lösbar.

- (i) y ist 2-mal stetig differenzierbar.
- (ii) y ist auf ganz $\mathbb{R}$ definiert.
- (iii) y ist monoton.

(b) Sei $f\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$ und $g\colon (0,1] \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen.

- (i) $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0 \implies \int_0^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ konvergiert,
- (ii) $\int_0^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ konvergiert $\implies \lim_{x\to\infty} f(x) = 0$,
- (iii) $\int_0^1 g(x)^2\,\mathrm{d}x$ konvergiert $\implies \int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x$ konvergiert,
- (iv) $\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x$ konvergiert $\implies \int_0^1 g(x)^2\,\mathrm{d}x$ konvergiert.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 6:

(a) (i) Die Aussage ist wahr. Per Definition ist y differenzierbar. Insbesondere ist $f(y)$ stetig (als Komposition stetiger Funktionen), also y stetig differenzierbar. Damit ist $f(y)$ stetig differenzierbar, was bedeutet dass y 2-mal stetig differenzierbar ist.

Bemerkung: Allgemeiner gilt mit ähnlichem Argument, wenn f n-mal [stetig] differenzierbar ist, dass y bereits $n+1$-mal [stetig] differenzierbar sein muss.

(ii) Diese Aussage ist falsch. Zum Beispiel hat $y' = y^2, y(0) = 1$ die Lösung $y(x) = \frac{1}{1-x}$ auf maximalen Definitionsbereich $(-\infty, 1)$.

(iii) Diese Aussage ist wahr. Zum Beweis nehmen wir per Widerspruch an, es gäbe eine nicht-monotone Lösung y der Differentialgleichung $y'(x) = f(y(x)), y(x_0) = y_0$. Dann nimmt f sowohl positives als auch negatives Vorzeichen an. Nach dem Zwischenwertsatz gibt es insbesondere ein $x_1 \in \mathbb{R}$ mit $f'(x_1) = 0$. Setzen wir $y_1 \coloneqq f(x_1)$, so hat das Anfangswertproblem

$$y' = f(y), \quad y(x_1) = y_1$$

zwei Lösungen: y und die konstante Funktion y_1. Nun ist diese Differentialgleichung eindeutig lösbar, was zeigt dass y auf ganz $\mathbb{R}$ definiert ist und konstant gleich y_1 ist. Insbesondere ist y monoton (sowohl wachsend als auch fallend).

Bemerkung: Diese Aussage lässt sich auch für stetige f beweisen. Nur ist der Beweis komplizierter, da diese Anfangswertprobleme nicht eindeutig lösbar sein müssen.

(b) (i) Diese Aussage ist falsch. Als Gegenbeispiel betrachten wir $f(x) = \frac{1}{x+1}$ für $x \in [0, \infty)$. Dann ist f stetig und es gilt $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$. Wegen

$$\int_0^R \frac{1}{x+1}\,\mathrm{d}x = \log(R+1) \to \infty$$

für $R \to \infty$, ist das uneigentliche Integral nicht konvergent.

(ii) Diese Aussage ist falsch. Ein Gegenbeispiel wurde in der Vorlesung angedeutet, das wir hier ausführen werden. Wir definieren die stetige “Hütchenfunktion” $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch

$$h(x) = \begin{cases} 1+x, & x \in [-1, 0], \\ 1-x, & x \in (0, 1], \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus [-1, 1]. \end{cases}$$

Es gilt

$$\int_{-1}^1 h(x)\,\mathrm{d}x = 1.$$

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ definieren wir $h_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch $h_n(x) = h(n^2(x-n))$ für $x \in \mathbb{R}$. Es gilt $h_n(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R} \setminus (n - \frac{1}{n^2}, n + \frac{1}{n^2})$ und wir berechnen mit der Substitution $y = n^2(x-n)$ das Integral

$$\int_{n-\frac{1}{n^2}}^{n+\frac{1}{n^2}} h_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_{n-\frac{1}{n^2}}^{n+\frac{1}{n^2}} h(n^2(x-n))\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n^2}\int_{-1}^1 h(y)\,\mathrm{d}y = \frac{1}{n^2}.$$

Wir definieren nun $f\colon [0, \infty) \to \mathbb{R}$ durch

$$f(x) = \sum_{n=2}^\infty h_n(x), \quad x \in [0, \infty),$$

und erhalten so eine stetige Funktion f mit der Eigenschaft $f(n) = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$. Insbesondere gilt also nicht $\lim_{x\to\infty} |f(x)| = 0$. Allerdings gilt

$$\int_0^R f(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_0^{\lceil R\rceil + \frac{1}{2}} f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=2}^{\lceil R\rceil} \int_{n-\frac{1}{n^2}}^{n+\frac{1}{n^2}} h_n(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=2}^{\lceil R\rceil} \frac{1}{n^2} \to \sum_{n=2}^\infty \frac{1}{n^2} < \infty$$

für $R \to \infty$. Folglich ist das uneigentliche Integral $\int_0^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ konvergent.

(iii) Diese Aussage ist wahr. Das uneigentliche Integral $\int_0^1 g(x)^2\,\mathrm{d}x$ sei konvergent. Wegen

$$|g(x)| \leq \tfrac{1}{2}(1 + g(x)^2)$$

und dem Majorantenkriterium ist $\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x$ absolut konvergent.

(iv) Diese Aussage ist falsch. Als Gegenbeispiel betrachten wir die Funktion $g\colon (0, 1] \to \mathbb{R}$ definiert durch $g(x) = x^{-1/2}$ für $x \in (0, 1]$. Wir haben

$$\int_r^1 g(x)\,\mathrm{d}x = \int_r^1 x^{-1/2}\,\mathrm{d}x = \Big[2x^{1/2}\Big]_r^1 = 2 - 2\sqrt{r} \to 2$$

für $r \to 0+$, aber

$$\int_r^1 g(x)^2\,\mathrm{d}x = \int_r^1 x^{-1}\,\mathrm{d}x = \big[\log(x)\big]_r^1 = -\log(r) \to \infty$$

für $r \to 0+$.