

13. Übungsblatt

Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Physik

Wintersemester 2023/24

1. Februar 2024

Behandelt am 8. Februar 2024

Aufgabe 1 (Übung):

Untersuchen Sie die folgenden uneigentlichen Integrale auf Konvergenz.

(a) $\int_0^1 \frac{1}{2\sqrt{t} - t^2} dt,$

(c) $\int_0^1 (\log(t))^4 dt,$

(b) $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} \log(1 + |t|) dt,$

(d) $\int_0^{\frac{1}{\pi}} \sin\left(\frac{1}{t}\right) dt.$

Aufgabe 2 (Tutorium):

Seien $\alpha \in (-\infty, 0)$ und $\beta \in \mathbb{R}$. Untersuchen Sie die folgenden uneigentlichen Integrale auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls ihren Wert

(a) $\int_0^{\infty} e^{\alpha t} \cos(\beta t) dt,$

(c) $\int_{-\infty}^3 \frac{e^{2t}}{1 + e^t} dt,$

(b) $\int_0^{\infty} \frac{t \log(t)}{\sinh(t) - t} dt,$

(d) $\int_2^{\infty} \frac{1}{t \log(t)^\beta} dt.$

Aufgabe 3 (Übung):

Es seien $b_1, b_2, b_3 \in C(\mathbb{R})$ gegeben durch $b_1(x) = \sin^2(x)$, $b_2(x) = \sin(x) \cos(x)$, $b_3(x) = \cos^2(x)$ für $x \in \mathbb{R}$. Weiter sei $V := \text{lin}\{b_1, b_2, b_3\}$ und $\phi: V \rightarrow C(\mathbb{R})$, $\phi(f) = f'$, wobei f' die Ableitung von f ist.

(a) Zeigen Sie, dass b_1, b_2, b_3 linear unabhängig sind.

(b) Zeigen Sie, dass ϕ linear ist.

(c) Bestimmen Sie Kern ϕ und Bild ϕ .

Aufgabe 4 (Tutorium):

Bestimmen Sie die Zeilennormalform der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 & 4 \\ 4 & -6 & 4 & -5 \\ -2 & 0 & 1 & 7 \end{pmatrix}.$$

Sind die Zeilen linear unabhängig? Bestimmen Sie eine Basis der linearen Hülle der Zeilen von A .

Aufgabe 5 (Übung):

Bestimmen Sie in Abhängigkeit von $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ die Zeilennormalform der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 3 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 4 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 4 & 4 \\ 1 & 0 & -1 & \alpha & \beta \end{pmatrix}.$$

Für welche α, β sind die Zeilen linear unabhängig? Bestimmen Sie eine Basis der linearen Hülle der Zeilen von A .

Aufgabe 6 (Tutorium):

Sei V ein $\mathbb{K}$ -Vektorraum, $v_1, \dots, v_n \in V$. Zeigen Sie oder widerlegen Sie durch ein Gegenbeispiel:

- (a) Ist $0 \in \{v_1, \dots, v_n\}$, so sind $v_1, \dots, v_n$ linear abhängig.
- (b) Sind $v_1, \dots, v_n$ linear abhängig, so lässt sich jeder Vektor aus $M := \{v_1, \dots, v_n\}$ als Linearkombination der anderen Vektoren aus M darstellen.
- (c) Existiert ein $v \in V$ mit eindeutiger Darstellung als Linearkombination der $v_1, \dots, v_n$, dann sind $v_1, \dots, v_n$ linear unabhängig.
- (d) Sind $v_1, \dots, v_n$ linear unabhängig und $v \in V$, dann sind $v_1 + v, v_2 + v, \dots, v_n + v$ linear unabhängig.
- (e) Sind v_1, v_2 linear unabhängig und sind v_1, v_3 linear unabhängig, so sind auch v_2, v_3 linear unabhängig.