Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Analysis
Priv.-Doz. Dr. Gerd Herzog
M.Sc. Niklas Knobel
M.Sc. Sebastian Ohrem

Lösungsvorschlag zum 13. Übungsblatt

Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Physik

Wintersemester 2023/24

8. Februar 2024

Aufgabe 1 (Übung):
Untersuchen Sie die folgenden uneigentlichen Integrale auf Konvergenz.

(a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{2\sqrt{t}-t^2}\,\mathrm{d}t$,

(b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\log(1+|t|)\,\mathrm{d}t$,

(c) $\displaystyle\int_0^1 (\log(t))^4\,\mathrm{d}t$,

(d) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{\pi}} \sin\left(\frac{1}{t}\right)\mathrm{d}t$.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 1:

(a) Für alle $0 < t \leq 1$ gilt $t^2 \leq t \leq \sqrt{t}$. Damit folgt

$$0 < \left|\frac{1}{2\sqrt{t}-t^2}\right| = \frac{1}{\sqrt{t}+(\sqrt{t}-t^2)} \leq \frac{1}{\sqrt{t}}$$

für alle $0 < t \leq 1$. Sei $0 < a < 1$. Es gilt

$$\int_a^1 \frac{1}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t = 2\Big[\sqrt{t}\Big]_{t=a}^{t=1} = 2 - 2\sqrt{a} \to 2$$

für $a \to 0+$. Also ist das uneigentliche Integral $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$ konvergent. Nach dem Majorantenkriterium aus der Vorlesung ist auch das Integral $\int_0^1 \frac{1}{2\sqrt{t}-t^2}\,\mathrm{d}t$ (absolut) konvergent.

(b) Wir schätzen für $t \in \mathbb{R}$ ab:

$$t^2 \geq |t| - \tfrac{1}{4} \implies \mathrm{e}^{-t^2} \leq \mathrm{e}^{\frac{1}{4}-|t|}$$

und

$$\log(1+|t|) \leq T_1(\log; x)(1+|t|) = \log(x) + \frac{1}{x}(1+|t|-x)$$

für $x > 0$, da log konkav ist. Die Tangenten-Ungleichung haben wir (für den Fall einer konvexen Funktion) in der Übung gezeigt.
Wir setzen $x = 1$, und erhalten so

$$0 \leq \mathrm{e}^{-t^2}\log(1+|t|) \leq \mathrm{e}^{\frac{1}{4}-|t|}|t|$$

Nun konvergiert

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-|t|}|t|\,\mathrm{d}t,$$

da die uneigentlichen Integrale $\int_0^\infty \mathrm{e}^{-|t|}|t|\,\mathrm{d}t = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-t}t\,\mathrm{d}t$ und $\int_{-\infty}^0 \mathrm{e}^{-|t|}|t|\,\mathrm{d}t = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-t}t\,\mathrm{d}t$ nach Aufgabe 5 von Übungsblatt 12 konvergieren mit Integralwert 1. Also folgt die Konvergenz des Integrals

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-t^2}\log(1+|t|)\,\mathrm{d}t$$

aus dem Majorantenkriterium.

(c) Sei $0 < a < 1$. Mit der Substitution $t = \mathrm{e}^{-s}$ berechnen wir

$$\int_a^1 (\log(t))^4 \,\mathrm{d}t = -\int_{-\log(a)}^0 s^4 \mathrm{e}^{-s} \,\mathrm{d}s = \int_0^{\log\left(\frac{1}{a}\right)} s^4 \mathrm{e}^{-s} \,\mathrm{d}s.$$

Wegen $\lim_{a\to 0+} \log\left(\frac{1}{a}\right) = \infty$, ist das uneigentliche Integral $\int_0^1 (\log(t))^4 \,\mathrm{d}t$ konvergent, wenn das uneigentliche Integral $\int_0^\infty s^4 \mathrm{e}^{-s} \,\mathrm{d}s$ konvergent ist. Dies ist nach Aufgabe 5 auf Übungsblatt 12 tatsächlich der Fall.

(d) Auf $(0, 1]$ gilt $\left|\sin(\frac{1}{t})\right| \leq 1$. Da das uneigentliche Integral

$$\int_0^1 1 \,\mathrm{d}t = \lim_{a\to 0} \int_a^1 1 \,\mathrm{d}t = \lim_{a\to 0} 1 - a = 1$$

konvergiert, liefert das Majorantenkriterium auch die Konvergenz des gesuchten Integrals.

Aufgabe 2 (Tutorium):
Seien $\alpha \in (-\infty, 0)$ und $\beta \in \mathbb{R}$. Untersuchen Sie die folgenden uneigentlichen Integrale auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls ihren Wert

(a) $\displaystyle\int_0^\infty \mathrm{e}^{\alpha t} \cos(\beta t) \,\mathrm{d}t$,

(b) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{t \log(t)}{\sinh(t) - t} \,\mathrm{d}t$,

(c) $\displaystyle\int_{-\infty}^3 \frac{\mathrm{e}^{2t}}{1 + \mathrm{e}^t} \,\mathrm{d}t$,

(d) $\displaystyle\int_2^\infty \frac{1}{t \log(t)^\beta} \,\mathrm{d}t$.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 2:

(a) Sei $T > 0$. Es gilt mit zweimaliger partieller Integration

$$\begin{aligned}
\int_0^b \mathrm{e}^{\alpha t} \cos(\beta t) \,\mathrm{d}t &= \frac{1}{\alpha} \left[\mathrm{e}^{\alpha t} \cos(\beta t)\right]_{t=0}^{t=T} + \frac{\beta}{\alpha} \int_0^T \mathrm{e}^{\alpha t} \sin(\beta t) \,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{\alpha} (\mathrm{e}^{\alpha T} \cos(\beta T) - 1) + \frac{\beta}{\alpha^2} \left[\mathrm{e}^{\alpha t} \sin(\beta t)\right]_{t=0}^{t=T} - \frac{\beta^2}{\alpha^2} \int_0^T \mathrm{e}^{\alpha t} \cos(\beta t) \,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{\alpha} (\mathrm{e}^{\alpha T} \cos(\beta T) - 1) + \frac{\beta}{\alpha^2} \mathrm{e}^{\alpha T} \sin(\beta T) - \frac{\beta^2}{\alpha^2} \int_0^T \mathrm{e}^{\alpha t} \cos(\beta t) \,\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

Addieren von $\frac{\beta^2}{\alpha^2} \int_0^T \mathrm{e}^{\alpha t} \cos(\beta t) \,\mathrm{d}t$ auf beiden Seiten liefert

$$\left(1 + \frac{\beta^2}{\alpha^2}\right) \int_0^T \mathrm{e}^{\alpha t} \cos(\beta t) \,\mathrm{d}t = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha^2} \int_0^T \mathrm{e}^{\alpha t} \cos(\beta t) \,\mathrm{d}t = \frac{1}{\alpha} (\mathrm{e}^{\alpha T} \cos(\beta T) - 1) + \frac{\beta}{\alpha^2} \mathrm{e}^{\alpha T} \sin(\beta T)$$

und damit

$$\int_0^T \mathrm{e}^{\alpha t} \cos(\beta t) \,\mathrm{d}t = -\frac{\alpha}{\alpha^2 + \beta^2} + \frac{\alpha}{\alpha^2 + \beta^2} \mathrm{e}^{\alpha T} \cos(\beta T) + \frac{\beta}{\alpha^2 + \beta^2} \mathrm{e}^{\alpha T} \sin(\beta T).$$

Wegen

$$\left|\mathrm{e}^{\alpha T} \cos(\beta T)\right| \leq \mathrm{e}^{\alpha T} \to 0 \quad \text{sowie} \quad \left|\mathrm{e}^{\alpha T} \sin(\beta T)\right| \leq \mathrm{e}^{\alpha T} \to 0 \quad \text{für } T \to \infty,$$

ist das uneigentliche Integral $\int_0^\infty \mathrm{e}^{\alpha t} \cos(\beta t) \,\mathrm{d}t$ konvergent und es gilt:

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \mathrm{e}^{\alpha t} \cos(\beta t) \,\mathrm{d}t &= \lim_{T\to\infty} \int_0^T \mathrm{e}^{\alpha t} \cos(\beta t) \,\mathrm{d}t \\
&= \lim_{T\to\infty} \left(-\frac{\alpha}{\alpha^2 + \beta^2} + \frac{\alpha}{\alpha^2 + \beta^2} \mathrm{e}^{\alpha T} \cos(\beta T) + \frac{\beta}{\alpha^2 + \beta^2} \mathrm{e}^{\alpha T} \sin(\beta T)\right) \\
&= -\frac{\alpha}{\alpha^2 + \beta^2}.
\end{aligned}$$

(b) Wir untersuchen den Integranden in der Nähe der unteren Grenze. Es gilt

$$\log(t) \leq \log\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right) = -1$$

für alle $0 < t \leq \frac{1}{\mathrm{e}}$. Ferner folgt aus der Potenzreihendarstellung des sinh und einer Indexverschiebung, dass

$$\begin{aligned} 0 < \sinh(t) - t &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} t^{2n+1} - t = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} t^{2n+1} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+3)!} t^{2n+3} = t^3 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+3)!} t^{2n} \end{aligned}$$

für alle $0 < t \leq \frac{1}{\mathrm{e}}$ gilt. Wir definieren $h\colon \mathbb{R} \to [0,\infty)$ durch $h(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+3)!} t^{2n}$ für $t \in \mathbb{R}$. Die Funktion h ist durch eine Potenzreihe mit unendlichem Konvergenzradius gegeben, insbesondere ist h also stetig. Als stetige Funktion nimmt sie auf kompakten Intervallen ihr Maximum an, also existiert ein $M > 0$ mit $0 < h(t) \leq M$ für alle $0 \leq t \leq \frac{1}{\mathrm{e}}$. Also gilt

$$-\frac{t\log(t)}{\sinh(t) - t} \geq \frac{t\log(\mathrm{e})}{t^3 h(t)} \geq \frac{1}{t^2 M}$$

für alle $0 < t \leq \frac{1}{\mathrm{e}}$. Wegen

$$\int_a^{\frac{1}{\mathrm{e}}} \frac{1}{t^2 M}\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{M}\left[\frac{1}{t}\right]_{t=a}^{t=\frac{1}{\mathrm{e}}} = \frac{1}{M}\left(\frac{1}{a} - \mathrm{e}\right) \to \infty$$

für $a \to 0+$, ist das uneigentliche Integral $\int_0^{\frac{1}{\mathrm{e}}} \frac{1}{t^2 M}\,\mathrm{d}t$ divergent. Nach dem Minorantenkriterium aus der Vorlesung ist dann auch das uneigentliche Integral

$$-\int_0^{\frac{1}{\mathrm{e}}} \frac{t\log(t)}{\sinh(t) - t}\,\mathrm{d}t$$

divergent. Somit ist das Integral

$$\int_0^{\infty} \frac{t\log(t)}{\sinh(t) - t}\,\mathrm{d}t$$

ebenfalls divergent.

(c) Sei $a < 3$. Mit der Substitution $s = \mathrm{e}^t$ berechnen wir

$$\begin{aligned} \int_a^3 \frac{\mathrm{e}^{2t}}{1 + \mathrm{e}^t}\,\mathrm{d}t &= \int_{\mathrm{e}^a}^{\mathrm{e}^3} \frac{s^2}{1+s}\frac{1}{s}\,\mathrm{d}s = \int_{\mathrm{e}^a}^{\mathrm{e}^3} \frac{1+s-1}{1+s}\,\mathrm{d}s \\ &= \int_{\mathrm{e}^a}^{\mathrm{e}^3} 1 - \frac{1}{1+s}\,\mathrm{d}s = [s - \log(1+s)]_{s=\mathrm{e}^a}^{s=\mathrm{e}^3} \\ &= \mathrm{e}^3 - \log(1+\mathrm{e}^3) - \mathrm{e}^a + \log(1+\mathrm{e}^a) \to \mathrm{e}^3 - \log(1+\mathrm{e}^3) \end{aligned}$$

für $a \to -\infty$. Damit ist das uneigentliche Integral $\int_{-\infty}^3 \frac{\mathrm{e}^{2t}}{1+\mathrm{e}^t}\,\mathrm{d}t$ konvergent und es gilt

$$\int_{-\infty}^3 \frac{\mathrm{e}^{2t}}{1+\mathrm{e}^t}\,\mathrm{d}t = \mathrm{e}^3 - \log(1+\mathrm{e}^3).$$

(d) Sei $T > 2$. Mit der Substitution $x = \log(t)$ und „$\mathrm{d}x = \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$" ergibt sich

$$\int_2^T \frac{1}{t\log(t)^\beta}\,\mathrm{d}t = \int_{\log(2)}^{\log(T)} \frac{1}{x^\beta}\,\mathrm{d}x.$$

Aus der Vorlesung wissen wir, dass das Integral $\int_1^\infty \frac{1}{x^\beta}$ genau für $\beta > 1$ konvergiert. Also konvergiert unser Integral auch genau für $\beta > 1$, und in diesem Fall gilt

$$\begin{aligned}\int_2^\infty \frac{1}{t\log(t)^\beta}\,\mathrm{d}t &= \lim_{T\to\infty}\int_2^T \frac{1}{t\log(t)^\beta}\,\mathrm{d}t = \lim_{T\to\infty}\left[-\frac{x^{1-\beta}}{1-\beta}\right]_{\log(T)}^{\log(T)} \\ &= \lim_{T\to\infty}\frac{\log(T)^{(1-\beta)}}{1-\beta} - \frac{\log(2)^{1-\beta}}{1-\beta} = \frac{1}{(\beta-1)\log(2)^{\beta-1}}.\end{aligned}$$

Aufgabe 3 (Übung):
Es seien $b_1, b_2, b_3 \in C(\mathbb{R})$ gegeben durch $b_1(x) = \sin^2(x)$, $b_2(x) = \sin(x)\cos(x)$, $b_3(x) = \cos^2(x)$ für $x \in \mathbb{R}$. Weiter sei $V \coloneqq \operatorname{lin}\{b_1, b_2, b_3\}$ und $\phi\colon V \to C(\mathbb{R}), \phi(f) = f'$, wobei f' die Ableitung von f ist.

(a) Zeigen Sie, dass b_1, b_2, b_3 linear unabhängig sind.

(b) Zeigen Sie, dass ϕ linear ist.

(c) Bestimmen Sie $\operatorname{Kern}\phi$ und $\operatorname{Bild}\phi$.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 3:

(a) Wir rechnen die Definition der linearen Unabhängigkeit nach. Dafür seien $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ mit

$$\alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 + \alpha_3 b_3 = 0,$$

d.h. $\alpha_1 b_1(x) + \alpha_2 b_2(x) + \alpha_3 b_3(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Für $x = 0$ erhalten wir daraus $\alpha_3 = 0$, Für $x = \frac{\pi}{2}$ erhalten wir daraus $\alpha_1 = 0$. Also ist $\alpha_2 b_2 = 0$. Setzen wir z.B. $x = \frac{\pi}{4}$ ein, folgt $\alpha_2 = 0$. Insgesamt haben wir $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$ gezeigt.

(b) Zunächst halten wir fest, dass ϕ definiert, d.h. dass jedes $f \in V$ eine stetige Ableitung besitzt: Da b_1, b_2, b_3 stetig differenzierbar sind, ist dies auch jede Linearkombination dieser 3 Vektoren ($C^1(\mathbb{R})$ ist ein Vektorraum!), also jedes $f \in V$.

Linearität von ϕ folgt aus den bekannten Rechenregeln für Ableitungen: Es gelten nämlich $\phi(\alpha f) = (\alpha f)' = \alpha f' = \alpha\phi(f)$ und $\phi(f+g) = (f+g)' = f' + g' = \phi(f) + \phi(g)$ für $f, g \in V$ und $\alpha \in \mathbb{R}$.

(c) Sei $f = \alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 + \alpha_3 b_3 \in V$. Dann ist

$$f'(x) = 2\alpha_1 \sin(x)\cos(x) + \alpha_2(\cos^2(x) - \sin^2(x)) - 2\alpha_3 \sin(x)\cos(x),$$

also

$$f' = -\alpha_2 b_1 + 2(\alpha_1 - \alpha_3) b_2 + \alpha_2 b_3.$$

Da b_1, b_2, b_3 linear unabhängig sind, erhalten wir direkt

$$f' = 0 \iff \alpha_2 = 0, \alpha_1 - \alpha_3 = 0 \iff f = \alpha_1(b_1 + b_3)$$

und damit als Kern

$$\operatorname{Kern}\phi = \{\alpha_1(b_1 + b_3)\colon \alpha_1 \in \mathbb{R}\} = \operatorname{lin}\{\mathbb{1}\},$$

die Menge aller Konstanten Funktionen. Hier bezeichnet $\mathbb{1} = b_1 + b_3$ die Konstante 1-Funktion.

Wir können auch direkt das Bild ablesen:

$$\operatorname{Bild}\phi = \{\alpha_2(b_3 - b_1) + \lambda b_2\colon \alpha_2, \lambda \in \mathbb{R}\} = \operatorname{lin}\{b_3 - b_1, b_2\}.$$

Aufgabe 4 (Tutorium):
Bestimmen Sie die Zeilennormalform der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 & 4 \\ 4 & -6 & 4 & -5 \\ -2 & 0 & 1 & 7 \end{pmatrix}.$$

Sind die Zeilen linear unabhängig? Bestimmen Sie eine Basis der linearen Hülle der Zeilen von A.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 4:
Wir führen folgende Zeilenumformungen durch:

$$
\begin{aligned}
A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 & 4 \\ 4 & -6 & 4 & -5 \\ -2 & 0 & 1 & 7 \end{pmatrix} &\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 & 4 \\ 0 & -6 & 6 & 9 \\ -2 & 0 & 1 & 7 \end{pmatrix} \\
\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \\ -2 & 0 & 1 & 7 \end{pmatrix} &\rightsquigarrow \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 & 7 \\ 0 & -2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \mid \cdot -\frac{1}{2} \\ \mid \cdot -\frac{1}{2} \\ \mid \cdot -\frac{1}{3} \end{array} \\
\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{7}{2} \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} &\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Die letzte Matrix ist in Zeilennormalform. Ablesen liefert den Zeilenrang $r = 3$. Nach der Vorlesung ($r = n$), sind die Zeilen von A damit linear unabhängig und bilden damit eine Basis ihrer linearen Hülle.

Aufgabe 5 (Übung):
Bestimmen Sie in Abhängigkeit von $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ die Zeilennormalform der Matrix

$$
A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 3 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 4 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 4 & 4 \\ 1 & 0 & -1 & \alpha & \beta \end{pmatrix}.
$$

Für welche α, β sind die Zeilen linear unabhängig? Bestimmen Sie eine Basis der linearen Hülle der Zeilen von A.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 5:
Wir führen folgende Zeilenumformungen durch:

$$
\begin{aligned}
B = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 3 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 4 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 4 & 4 \\ 1 & 0 & -1 & \alpha & \beta \end{pmatrix} &\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -4 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 6 & 2 \\ 0 & 8 & -4 & 8 & 4 \\ 1 & 0 & -1 & \alpha & \beta \end{pmatrix} \\
\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 10 & 4 \\ 0 & 2 & -2 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & -16 & -4 \\ 1 & 0 & -1 & \alpha & \beta \end{pmatrix} &\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 6 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -16 & -4 \\ 1 & 0 & -1 & \alpha & \beta \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \mid \cdot \frac{1}{2} \\ \mid \cdot \frac{1}{4} \\ \\ \end{array} \\
\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & \alpha & \beta \end{pmatrix} &\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha - 10 & \beta - 4 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Die letzte Matrix ist für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ in Zeilenstufenform. Ablesen liefert den Zeilenrang $r = 4$, für $\alpha \neq 10$ oder $\beta \neq 4$. Ansonsten ist $r = 3$. Nach der Vorlesung ($r = n$), sind die Zeilen von A damit linear unabhängig genau dann, wenn $\alpha \neq 10$ oder $\beta \neq 4$ gilt. Sind $\alpha = 10$ und $\beta = 4$, so ist die letzte Matrix bereits die Zeilennormalform von B und die Basis ist gegeben durch die drei ersten Zeilen der Matrix. In allen anderen Fällen ist eine Basis durch alle vier Zeilen der Ausgangsmatrix gegeben. Ist $\alpha = 10$ aber $\beta \neq 4$, so ist

$$
B \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \beta - 4 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \\ \mid \cdot \frac{1}{\beta-4} \end{array} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
$$

die Zeilennormalform von B. Ist $\alpha \neq 10$, so sei $\kappa = \frac{\beta-4}{\alpha-10}$ und es gilt

$$B \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha-10 & \beta-4 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \mid \cdot \frac{1}{\alpha-10} \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \kappa \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 3-6\kappa \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \kappa \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1+4\kappa \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \kappa \end{pmatrix}$$

die Zeilennormalform von B.

Aufgabe 6 (Tutorium):
Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum, $v_1, \dots, v_n \in V$. Zeigen Sie oder widerlegen Sie durch ein Gegenbeispiel:

(a) Ist $0 \in \{v_1, \dots, v_n\}$, so sind $v_1, \dots, v_n$ linear abhängig.

(b) Sind $v_1, \dots, v_n$ linear abhängig, so lässt sich jeder Vektor aus $M \coloneqq \{v_1, \dots, v_n\}$ als Linearkombination der anderen Vektoren aus M darstellen.

(c) Existiert ein $v \in V$ mit eindeutiger Darstellung als Linearkombination der $v_1, \dots, v_n$, dann sind $v_1, \dots, v_n$ linear unabhängig.

(d) Sind $v_1, \dots, v_n$ linear unabhängig und $v \in V$, dann sind $v_1 + v, v_2 + v, \dots, v_n + v$ linear unabhängig.

(e) Sind v_1, v_2 linear unabhängig und sind v_1, v_3 linear unabhängig, so sind auch v_2, v_3 linear unabhängig.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 6:

(a) Diese Aussage ist wahr. Zum Beweis sei $v_j = 0$. Dann können wir $0 = 1 \cdot v_j = \sum_{k=1}^n \delta_{jk} v_k$ schreiben (wobei δ_{kj} das Kroneckersymbol ist), und haben so eine nichttriviale Darstellung des Nullvektors gefunden.

(b) Diese Aussage ist falsch. Als Gegenbeispiel betrachten wir $v_1 = e_1, v_2 = 0$ als Teilmenge des Vektorraums $\mathbb{R}^2$. Nach dem ersten Teil sind v_1, v_2 linear abhängig. Allerdings gibt es kein $\alpha \in \mathbb{R}$ mit $e_1 = \alpha \cdot 0$.

(c) Diese Aussage ist wahr. Zum Beweis nehmen wir im Gegenteil an, dass $v_1, \dots, v_n$ linear abhängig sind. Dann gibt es $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$, nicht alle gleich 0, mit $0 = \sum_{k=1}^n \alpha_k v_k$. Sei $v \in V$ ein Vektor mit eindeutiger Darstellung als Linearkombination der Vektoren $v_1, \dots, v_n$. Dann erhalten wir durch $v = v + 0$ eine weitere Darstellung von v als Linearkombination, ein Widerspruch. Also muss die Annahme verworfen werden und es folgt die Behauptung.

(d) Diese Aussage ist falsch. Als Gegenbeispiel betrachten wir $V = \mathbb{R}^2$ und setzen $v_1 = e_1$, $v_2 = e_2$ und $v = -e_1$. Dann sind v_1, v_2 linear unabhängig, aber $v_1 + v = 0$ und $v_2 + v = (-1, 1)^\top$ sind nach dem ersten Teil linear abhängig.

(e) Diese Aussage ist falsch. Als Gegenbeispiel betrachten wir $V = \mathbb{R}^2$ und setzen $v_1 = e_1$ und $v_2 = v_3 = e_2$. Dann sind v_1, v_2 sowie v_1, v_3 linear unabhängig, aber wegen $v_2 - v_3 = 0$ sind v_2, v_3 linear abhängig.