Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Analysis
Priv.-Doz. Dr. Gerd Herzog
M.Sc. Niklas Knobel
M.Sc. Sebastian Ohrem

14. Übungsblatt

Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Physik

Wintersemester 2023/24

8. Februar 2023

Behandelt am 15. Februar 2023

Aufgabe 1 (Übung):
Seien $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ und

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ \beta & 2 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie in Abhändigkeit von α, β eine Basis von $\mathrm{Bild}(A)$ und $\mathrm{Kern}(A)$, sowie alle Lösungen $x \in \mathbb{R}^2$ der Gleichung $Ax = b$.

Aufgabe 2 (Tutorium):
Sei $\alpha \in \mathbb{R}$ und

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & \alpha \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} \alpha \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie in Abhängigkeit von α eine Basis von $\mathrm{Bild}(A)$ und $\mathrm{Kern}(A)$, sowie alle Lösungen $x \in \mathbb{R}^3$ der Gleichung $Ax = b$.

Aufgabe 3 (Übung):
Es seien

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 : x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0 \right\}, \quad u_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad u_3 = \begin{pmatrix} -7 \\ 3 \\ -7 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie:

(a) $\mathrm{lin}(\{u_1, u_2, u_3\}) \subseteq U$

(b) u_1, u_2, u_3 bilden eine Basis von U

Aufgabe 4 (Tutorium):
Seien $u_1, u_2, v_1, v_2 \in C^\infty(\mathbb{R})$ gebeben durch

$$u_1(t) = e^{-\alpha t}\cosh(\beta t), \quad u_2(t) = e^{-\alpha t}\frac{1}{\beta}\sinh(\beta t), \quad v_1(t) = e^{(-\alpha+\beta)t}, \quad v_2(t) = e^{(-\alpha-\beta)t}$$

für alle $t \in \mathbb{R}$ mit den Konstanten $\alpha, \beta > 0$. Zeigen Sie:

(a) u_1, u_2 sind linear unabhängig

(b) $\mathrm{lin}(\{u_1, u_2\}) = \mathrm{lin}(\{v_1, v_2\})$

Aufgabe 5 (Tutorium):
Bestimmen sie alle Parameter $a, b, c, d, e \in \mathbb{R}$ für die

$$B = \begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & e & 0 \\ c & 0 & d \end{pmatrix}.$$

invertierbar ist und geben Sie die Inverse an.

Aufgabe 6 (Übung):
Seien $a_1, a_2, a_3 \in C(\mathbb{R})$ gegeben durch $a_1(x) = 1$, $a_2(x) = \sin(2x)$ und $a_3(x) = \cos(2x)$ für $x \in \mathbb{R}$.
Seien $b_1, b_2, b_3 \in C(\mathbb{R})$ gegeben durch $b_1(x) = \sin^2(x)$, $b_2(x) = \sin(x)\cos(x)$, $b_3(x) = \cos^2(x)$ für $x \in \mathbb{R}$ und $V \coloneqq \operatorname{lin}\{b_1, b_2, b_3\}$ (vergleiche Blatt 13 Aufgabe 3).

(a) Zeigen sie, dass $\operatorname{lin}\{a_1, a_2, a_3\} = V$ ist, und folgern sie dass $\{a_1, a_2, a_3\}$ eine Basis von V ist.

(b) Berechnen Sie die Darstellungsmatrix B von Id bezüglich b_1, b_2, b_3 im Argumentraum und a_1, a_2, a_3 im Zielraum.

(c) Sei $\phi\colon V \to C(\mathbb{R})$, $\phi(f) = f'$, wobei f' die Ableitung von f ist. Von Blatt 13 Aufgabe 3 wissen wir das ϕ eine lineare Abbildung ist. Geben sie die Matrixdarstellung von ϕ bezüglich der Basis a_1, a_2, a_3 (in Argument- und Zielraum) sowie bezüglich b_1, b_2, b_3 (in Argument- und Zielraum) an.

Erinnerung: Die Modulprüfung (Klausur) findet am Donnerstag, den **14.3.2024** von **11:00** Uhr statt. Bitte denken Sie daran, sich rechtzeitig im Online-Portal Campus-Management-für-Studierende dafür anzumelden. Anmeldeschluss ist der **07.03.2024**.