Institut für Analysis
apl. Prof. Dr. Peer Christian Kunstmann
Marvin Schulz, M.Sc.

WS2024/25
24.11.2024

Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Physik

1. Übungsblatt

Liebe Studierende, bitte bearbeiten Sie die nachfolgenden Aufgaben als Nachbereitung zur Vorlesung und zur Vertiefung des Stoffes. Die mit **T** gekennzeichneten Aufgaben werden in den Tutorien priorisiert. Die anderen Aufgaben werden in den Übungen priorisiert nachbesprochen. Idealerweise haben Sie die Aufgben selbstständig (noch besser in Lerngruppen) bearbeitet um so besser vorbereitet ins Tutorium zu gehen.

Aufgabe 1:

(a) Negieren Sie die Aussagen

(i) „Alle Deutschen sind groß und trinken Bier",

(ii) „Jeder Topf besitzt einen passenden Deckel."

(b) Vereinfachen Sie durch logische Umformungen die Aussage $\neg A \vee (B \wedge A)$.

Aufgabe 2: [Logische Verknüpfungen **T**]

(a) Negieren Sie die Aussagen

(i) „Ich gehe immer ins Kino, wenn Batman oder James Bond gezeigt werden,"

(ii) „Es gibt einen Bundesligaverein, der in allen Spielen höchstens drei Tore geschossen und mindestens einen Spieler ausgewechselt hat."

(b) Zeigen Sie durch logische Umformungen die Aussage $((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$.

Aufgabe 3:

Zeigen Sie für beliebige Teilmengen M_1, M_2 einer Grundmenge X die Äquivalenz der folgenden Aussagen

(i) $M_1 \subseteq M_2$,

(ii) $M_1 \cap M_2 = M_1$,

(iii) $M_1 \cup M_2 = M_2$.

Aufgabe 4: [Elementare Beweise **T**]

Zeigen Sie für beliebige Teilmengen M_1, M_2 und M_3 einer Grundmenge X die Aussage

$$((M_1 \cap M_2 \subseteq M_3^c) \wedge (M_1 \cup M_3 \subseteq M_2)) \Rightarrow M_1 \cap M_3 = \emptyset.$$

Hinweis: Für eine Teilmenge M der Grundmenge X wird mit

$$M^c = X \setminus M = \{x \in X | x \notin M\}$$

das *Komplement* von M in X bezeichnet.

Aufgabe 5:
Seien X, Y Mengen und $f : X \to Y$ eine Abbildung. Zeigen Sie für beliebige $M_1, M_2 \subseteq Y$ und $M_3, M_4 \subseteq X$

(i) $f^{-1}(M_1 \cap M_2) = f^{-1}(M_1) \cap f^{-1}(M_2)$,

(ii) $f(M_3 \cap M_4) \subseteq f(M_3) \cap f(M_4)$,

(iii) $f(M_3 \cup M_4) = f(M_3) \cup f(M_4)$.

Zeigen Sie durch Gegenbeispiel, dass in (ii) keine Gleichheit gelten muss.

Aufgabe 6: [Abbildungen **T**]
Es seien X, Y, Z Mengen und $f : X \to Y$, sowie $g : Y \to Z$ Abbildungen. Zeigen Sie oder widerlegen Sie durch ein Gegenbeispiel die folgenden Aussagen:

(i) Ist f und g injektiv, so ist auch $g \circ f$ injektiv.

(ii) Ist $g \circ f$ injektiv, so ist auch g injektiv.

(iii) Ist f und g surjektiv, so ist auch $g \circ f$ surjektiv.

(iv) Ist $g \circ f$ surjektiv, so ist auch f surjektiv.

(v) Ist $g \circ f$ surjektiv, so ist auch g surjektiv.

(vi) Ist f und g bijektiv, so ist auch $g \circ f$ bijektiv.

(vii) Ist $g \circ f$ surjektiv und g injektiv, so ist f surjektiv.

(viii) Ist $g \circ f$ nicht injektiv, so gilt: f ist nicht injektiv und g ist nicht injektiv.

(ix) Ist $g \circ f$ nicht surjektiv, so gilt: f ist nicht surjektiv und g ist nicht surjektiv.

Hinweis: In der großen Saalübung werden voraussichtlich die Aufgaben 1, 3 und 5 besprochen. Die restlichen Aufgaben werden in den Tutorien behandelt (Markiert mit [T]).