Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Analysis
apl. Prof. Dr. Peer Christian Kunstmann
Marvin Schulz, M.Sc.

WS2024/25
24.11.2024

Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Physik

2. Übungsblatt

Aufgabe 7:
Bestimmen Sie für die folgenden Mengen jeweils das Infimum, Minimum, Supremum und Maximum, sofern sie existieren.

(a) $A = \left\{x^2 - x + 2 | x \in \mathbb{R}\right\}$,

(b) $B = \left\{n + \frac{1}{n} \middle| n \in \mathbb{N}\right\}$.

Aufgabe 8: [Inf, Sup, Min, Max **T**]
Bestimmen Sie für die folgenden Mengen jeweils das Infimum, Minimum, Supremum und Maximum, sofern sie existieren.

(a) $A = \left\{x + \frac{1}{x} \middle| 0 < x \leq 42\right\}$,

(b) $B = \left\{\frac{x^2}{1+x^2} \middle| x \in \mathbb{R}\right\}$.

Aufgabe 9:
Bestimmen Sie jeweils die Menge M aller $x \in \mathbb{R}$, für die die folgenden Gleichungen bzw. Ungleichungen gelten.

(a) $|2x - 10| \leq x$,

(b) $|x-2|\,|x+2| = 2$,

(c) $|x+2| > |x-3|$,

(d) $|2 - |2 - x|| = 2$.

Aufgabe 10: [Ungleichungen **T**]
Bestimmen Sie jeweils die Menge M aller $x \in \mathbb{R}$, für die die folgenden Gleichungen bzw. Ungleichungen gelten.

(a) $|4 - 3x| > 2x + 10$,

(b) $\left|x^2 - 4\right| \leq x + 2$,

(c) $|x - 4| = |x + 1|$.

(d) $||x+1| - 2| \leq x$,

Aufgabe 11:
Zeigen Sie die folgenden Aussagen durch vollständige Induktion.

(a) $\sum_{k=1}^{n} k \cdot k! = (n+1)! - 1 \qquad \forall n \in \mathbb{N}$,

(b) $\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} k^2 = (-1)^{n+1} \frac{n(n+1)}{2} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$.

Zeigen Sie die erste Aussage auch ohne Verwendung der vollständigen Induktion.
Zeigen Sie die folgenden Aussagen durch vollständige Induktion.

(i) $\prod_{k=1}^{n-1} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k = \frac{n^n}{n!} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$,

(ii) $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$.

(iii) $\sum_{k=0}^{n} k \cdot \binom{n}{k} = n \cdot 2^{n-1} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$.

(iv) $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$.

Zeigen Sie die letzte Aussage (i), (ii) auch ohne Verwendung der vollständigen Induktion.
Hinweis: Es gilt $\sum_{k=1}^{n} k^3 - \sum_{k=1}^{n} (k-1)^3 = n^3$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 12: [Vollständige Induktion **T**]
Zeigen Sie die folgenden Aussagen durch vollständige Induktion. Achten Sie darauf, wie Sie die Annahme im Induktionsschritt formulieren. (Siehe Zusammenfassung der Vorlesung Kapitel 4.8)

$$2^n > n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Teil 2: Abschnittsinduktion:
Es sei $u_1 = 3$ und $u_2 = 15$. Wir definieren rekursiv $u_{n+2} := 5u_{n+1} - 4u_n$. Zeigen Sie die folgenden Aussagen durch vollständige Induktion für alle $n \in \mathbb{N}$.

(i) u_n ist durch drei teilbar für jedes $n \in \mathbb{N}$;

(ii) u_n ist durch 15 teilbar wenn $n \in \mathbb{N}$ gerade ist.