Institut für Analysis
apl. Prof. Dr. Peer Christian Kunstmann
Marvin Schulz, M.Sc.

WS2024/25
25.11.2024

Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Physik

Lösungsvorschläge zum 3. Übungsblatt

Aufgabe 13:

(a) Wir führen einen Beweis durch vollständige Induktion über l.

- *IA* ($l = 0$):
  Für $l = 0$ gilt

$$\sum_{n=0}^{l} \binom{k+n}{k} = \binom{k}{k} = 1 = \binom{k+1}{k+1} = \binom{k+l+1}{k+1}.$$

- *IS* ($l \rightsquigarrow l+1$):
  Sei $l \in \mathbb{N}$ beliebig. Für dieses l gelte die Induktionsvoraussetzung (IV)

$$\sum_{n=0}^{l} \binom{k+n}{k} = \binom{k+l+1}{k+1}.$$

  Nach Lemma aus dem Abschnitt 4.10 gilt

$$\binom{k+l+1}{k} + \binom{k+l+1}{k+1} = \binom{k+l+2}{k+1}.$$

  Dann gilt für $l+1$

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{l+1} \binom{k+n}{k} &= \binom{k+l+1}{k} + \sum_{n=0}^{l} \binom{k+n}{k} \\ &\overset{(IV)}{=} \binom{k+l+1}{k} + \binom{k+l+1}{k+1} = \binom{k+l+2}{k+1}.\end{aligned}$$

(b) Wir führen einen Beweis durch vollständige Induktion über m.

- *IA* ($m = 0$):
  Es gilt

$$\left(\sum_{k=0}^{m} a_k z^k\right)\left(\sum_{l=0}^{n} b_l z^l\right) = a_0 \left(\sum_{l=0}^{n} b_l z^l\right) = \sum_{k=0}^{m+n} \left(\sum_{l=0}^{k} a_{k-l} b_l\right) z^k$$

  für alle $z \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}_0$, $a_0, b_0, \dots, b_n \in \mathbb{C}$ mit $a_k = 0$ für $k \in \{1, \dots, n\}$.

- *IS* ($m \rightsquigarrow m+1$):
  Sei $m \in \mathbb{N}$ beliebig. Für dieses m gelte die Induktionsvoraussetzung (IV)

$$\left(\sum_{k=0}^{m} \tilde{a}_k \tilde{z}^k\right)\left(\sum_{l=0}^{n} \tilde{b}_l \tilde{z}^l\right) = \sum_{k=0}^{m+n}\left(\sum_{l=0}^{k} \tilde{a}_{k-l}\tilde{b}_l\right)\tilde{z}^k$$

für jedes $\tilde{z} \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}_0$, $\tilde{a}_0, \ldots, \tilde{a}_m, \tilde{b}_0, \ldots, \tilde{b}_n \in \mathbb{C}$ mit $\tilde{a}_k = 0$ für $k \in \{m+1, \ldots, m+n\}$ bzw. $\tilde{b}_l = 0$ für $l \in \{n+1, \ldots, m+n\}$. Dann gilt für $m+1$

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{k=0}^{m+1} a_k z^k\right)\left(\sum_{l=0}^{n} b_l z^l\right) &= \left(a_{m+1}z^{m+1} + \sum_{k=0}^{m} a_k z^k\right)\left(\sum_{l=0}^{n} b_l z^l\right) \\
&= a_{m+1}z^{m+1}\left(b_n z^n + \sum_{l=0}^{n-1} b_l z^l\right) + \left(\sum_{k=0}^{m} a_k z^k\right)\left(\sum_{l=0}^{n} b_l z^l\right) \\
&\overset{\text{(IV)}}{=} a_{m+1}b_n z^{m+n+1} + \sum_{l=0}^{n} a_{m+1}b_l z^{l+m+1} \\
&\quad + \sum_{k=0}^{m+n}\left(\sum_{\substack{l=0,\\ k-l\neq m+1}}^{k} a_{k-l}b_l\right) z^k \\
&\overset{\substack{\text{Index-}\\ \text{shift}}}{=} a_{m+1}b_n z^{m+n+1} + \sum_{k=m+1}^{m+n+1} a_{m+1}b_{k-m-1}z^k \\
&\quad + \sum_{k=0}^{m}\left(\sum_{l=0}^{k} a_{k-l}b_l\right) z^k + \sum_{k=m+1}^{m+n}\left(\sum_{\substack{l=0,\\ k-l\neq m+1}}^{k} a_{k-l}b_l\right) z^k \\
&= a_{m+1}b_n z^{m+n+1} + \sum_{k=0}^{m}\left(\sum_{l=0}^{k} a_{k-l}b_l\right) z^k \\
&\quad + \sum_{k=m+1}^{m+n}\left(a_{m+1}b_{k-m-1} + \sum_{\substack{l=0,\\ k-l\neq m+1}}^{k} a_{k-l}b_l\right) z^k \\
&= a_{m+1}b_n z^{m+n+1} + \sum_{k=0}^{m}\left(\sum_{l=0}^{k} a_{k-l}b_l\right) z^k \\
&\quad + \sum_{k=m+1}^{m+n}\left(\sum_{l=0}^{k} a_{k-l}b_l\right) z^k \\
&= a_{m+1}b_n z^{m+n+1} + \sum_{k=0}^{m+n}\left(\sum_{l=0}^{k} a_{k-l}b_l\right) z^k \\
&= \sum_{k=0}^{m+n+1}\left(\sum_{l=0}^{k} a_{k-l}b_l\right) z^k.
\end{aligned}$$

□

Aufgabe 14:

Halten wir zunächst die folgende Folgerung aus Abschnitt 5.5 des Skriptes fest.

Satz (Koeffizientenvergleich)**.** *Seien $p, q \in \mathbb{C}[z]$ Polynome, etwa*

$$p(z) = \sum_{k=0}^{m} a_k z^k, \qquad q(z) = \sum_{l=0}^{m} b_l z^l$$

mit $m \in \mathbb{N}_0$, $a_0, \ldots, a_m, b_0, \ldots b_m \in \mathbb{C}$. Gilt $p(z) = q(z)$ für unendliche viele paarweise verschiedene $z \in \mathbb{C}$, so gilt $a_k = b_k$ für alle $k \in \{0, \ldots, m\}$.

Beweis. Betrachte $r := p - q \in \mathbb{C}[z]$. Nach Voraussetzung hat r unendlich viele Nullstellen. Entweder, $a_k - b_k = 0$ für alle $k \in \{0, \ldots, m\}$ und es ist nichts zu zeigen, oder r hat einen Grad $n \in \mathbb{N}_0$. Nach Abschnitt 5.5 des Skriptes hätte r dann aber höchstens n Nullstellen, was nicht der Fall ist. □

Dem Hinweis folgend betrachten wir das Polynom $p(z) = (1+z)^{m+n}$. Für jedes $z \in \mathbb{C}$ gilt $p(z) = (1+z)^{m+n} = (1+z)^m(1+z)^n$. Nach dem Binomialsatz aus Abschnitt 4.11 des Skriptes gilt also einerseits

$$(1+z)^{m+n} = \sum_{k=0}^{m+n} \binom{m+n}{k} z^k 1^{m+n-k} = \sum_{k=0}^{m+n} \binom{m+n}{k} z^k.$$

Andererseits — unter Anwendung der Aufgabe 13 (b) — aber auch

$$(1+z)^m(1+z)^n = \left(\sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} z^k\right)\left(\sum_{l=0}^{n} \binom{n}{l} z^l\right) = \sum_{k=0}^{m+n} z^k \left(\sum_{l=0}^{k} \binom{m}{k-l}\binom{n}{l}\right).$$

Koeffizientenvergleich liefert

$$\binom{m+n}{l} = \sum_{k=0}^{l} \binom{m}{l-k}\binom{n}{k} \overset{\text{Summations-}}{\underset{\text{reihenfolge}}{=}} \sum_{k=0}^{l} \binom{m}{k}\binom{n}{l-k}.$$

□

Aufgabe 15:

(i) Sei $z = x + \mathrm{i}y \in \mathbb{C}$ mit $x, y \in \mathbb{R}$. Es gilt

$$\begin{aligned}
z \in A \quad &\Leftrightarrow \quad |z + 1 + \mathrm{i}| = |z - 3 - 3\mathrm{i}| \\
&\Leftrightarrow \quad |(x+1) + \mathrm{i}(y+1)|^2 = |(x-3) + \mathrm{i}(y-3)|^2 \\
&\Leftrightarrow \quad (x+1)^2 + (y+1)^2 = (x-3)^2 + (y-3)^2 \\
&\Leftrightarrow \quad x^2 + 2x + 1 + y^2 + 2y + 1 = x^2 - 6x + 9 + y^2 - 6y + 9 \\
&\Leftrightarrow \quad 2x + 2y + 2 = -6x - 6y + 18 \\
&\Leftrightarrow \quad 8y = -8x + 16 \Leftrightarrow y = 2 - x,
\end{aligned}$$

d.h. $A = \{z \in \mathbb{C} \,|\, \mathrm{Im}(z) = 2 - \mathrm{Re}(z)\}$. Also ist A eine Gerade in der komplexen Zahlenebene. Siehe auch Abbildung (1).

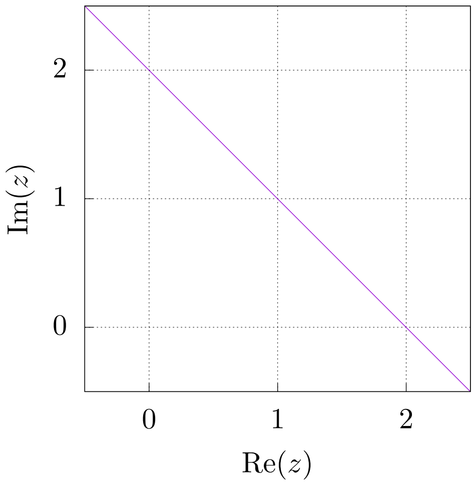

Abbildung 1: Menge A

(ii) Sei $z = x + \mathrm{i}y \in \mathbb{C}$ mit $x, y \in \mathbb{R}$. Es gilt

$$\begin{aligned} z \in C \quad &\Leftrightarrow \quad \mathrm{Re}(z^2) > 1 \Leftrightarrow \mathrm{Re}((x+\mathrm{i}y)^2) > 1 \Leftrightarrow \mathrm{Re}(x^2 - y^2 + 2\mathrm{i}xy) > 1 \\ &\Leftrightarrow \quad x^2 - y^2 > 1 \Leftrightarrow |x| > \sqrt{1+y^2} \Leftrightarrow x > \sqrt{1+y^2} \vee x < -\sqrt{1+y^2}. \end{aligned}$$

Also ist $C = \left\{ z \in \mathbb{C} \middle| \, \mathrm{Re}(z) > \sqrt{1 + (\mathrm{Im}(z))^2} \right\} \cup \left\{ z \in \mathbb{C} \middle| \, \mathrm{Re}(z) < -\sqrt{1 + (\mathrm{Im}(z))^2} \right\}$. Siehe auch Abbildung (2).

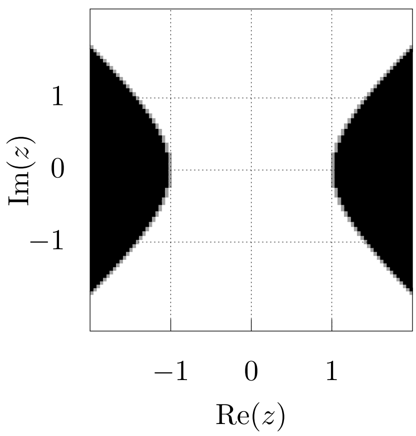

Abbildung 2: Menge B

$\square$

Aufgabe 16:

(i) Es gilt

$$\begin{aligned} A &= \{z \in \mathbb{C} |\, |z - \mathrm{i}| \geq 1 \wedge |z - 1 - 2\mathrm{i}| < 3\} \\ &= \{z \in \mathbb{C} |\, |z - \mathrm{i}| \geq 1\} \cap \{z \in \mathbb{C} |\, |z - 1 - 2\mathrm{i}| < 3\} \\ &= \{z \in \mathbb{C} |\, |z - 1 - 2\mathrm{i}| < 3\} \cap \{z \in \mathbb{C} |\, |z - \mathrm{i}| < 1\}^c \\ &= \{z \in \mathbb{C} |\, |z - 1 - 2\mathrm{i}| < 3\} \setminus \{z \in \mathbb{C} |\, |z - \mathrm{i}| < 1\}\,. \end{aligned}$$

Also ist A die offene Kugel um $1 + 2\mathrm{i}$ mit Radius 3 ohne die offene Kugel um i mit Radius 1. Siehe auch Abbildung (3).

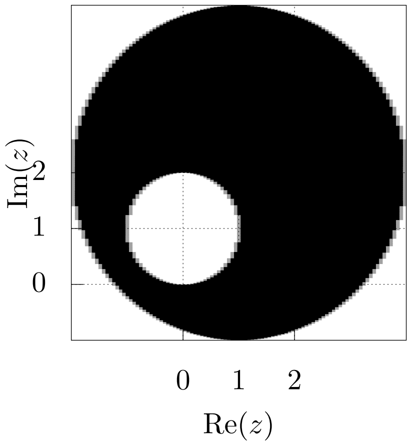

Abbildung 3: Menge A

(ii) Sei $z = x + \mathrm{i}y \in \mathbb{C}$ mit $x, y \in \mathbb{R}$. Es gilt

$$z \in B \Leftrightarrow \mathrm{Im}(z^2) \leq 1 \Leftrightarrow \mathrm{Im}((x + \mathrm{i}y)^2) \leq 1 \Leftrightarrow \mathrm{Im}(x^2 - y^2 + 2\mathrm{i}xy) \leq 1 \Leftrightarrow xy \leq \frac{1}{2}.$$

Wir unterscheiden die folgenden Fälle.

- Ist $x = 0$, dann ist $z \in B$.
- Ist $x > 0$, dann ist $z \in B \Leftrightarrow y \leq \frac{1}{2x}$.
- Ist $x < 0$, dann ist $z \in B \Leftrightarrow y \geq \frac{1}{2x}$.

Also gilt

$$\begin{aligned} B = &\{z \in \mathbb{C} |\, \mathrm{Re}(z) = 0\} \\ &\cup \left\{z \in \mathbb{C} |\, \mathrm{Re}(z) > 0 \wedge \mathrm{Im}(z) \leq \frac{1}{2\,\mathrm{Re}(z)}\right\} \\ &\cup \left\{z \in \mathbb{C} |\, \mathrm{Re}(z) < 0 \wedge \mathrm{Im}(z) \geq \frac{1}{2\,\mathrm{Re}(z)}\right\}. \end{aligned}$$

Siehe auch Abbildung (4).

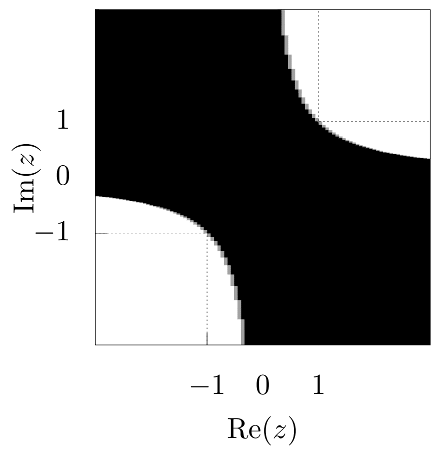

Abbildung 4: Menge B

□

Aufgabe 17:

(a) Im Folgenden sei $w = a + \mathrm{i}b \in \mathbb{C}$ mit $a, b \in \mathbb{R}$.

(i) Es gilt

$$\begin{aligned} w^3 &= (a+\mathrm{i}b)^3 = a^3 + 3a^2(\mathrm{i}b) + 3a(\mathrm{i}b)^2 + (\mathrm{i}b)^3 = a^3 + 3\mathrm{i}a^2b - 3ab^2 - \mathrm{i}b^3 \\ &= a(a^2 - 3b^2) + \mathrm{i}b(3a^2 - b^2). \end{aligned}$$

Einsetzen von $w = 4 - 3\mathrm{i} = z$ liefert

$$\operatorname{Re}(z^3) = 4(4^2 - 3(-3)^2) = -44, \qquad \operatorname{Im}(z^3) = -3(3 \cdot 4^2 - (-3)^2) = -117.$$

Ferner gilt

$$\left|w^3\right| = \sqrt{(w^3)\overline{w^3}} = \left(\sqrt{w\overline{w}}\right)^3 = |w|^3.$$

Da $|z| = \sqrt{4^2 + 9} = \sqrt{25} = 5$, folgt $\left|z^3\right| = |z|^3 = 125$.

(ii) Für $w \neq 0$ gilt

$$\frac{1}{w} = \frac{\overline{w}}{w\overline{w}} = \frac{\overline{w}}{|w|^2} = \frac{a}{a^2+b^2} - \mathrm{i}\frac{b}{a^2+b^2}.$$

Einsetzen von $w = 4 - 3\mathrm{i} = z$ liefert

$$\operatorname{Re}\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{4}{25}, \qquad \operatorname{Im}\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{3}{25}.$$

Ferner gilt für $w \neq 0$

$$\left|\frac{1}{w}\right| = \left|\frac{\overline{w}}{|w|^2}\right| = \frac{1}{|w|^2}\,|a - \mathrm{i}b| = \frac{1}{|w|^2}\sqrt{a^2 + (-b)^2} = \frac{|w|}{|w|^2} = \frac{1}{|w|}.$$

Also ist $\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{5}$.

(b) Es gilt

$$\begin{aligned}
z^3+8=0 &\Leftrightarrow (x+\mathrm{i}y)^3+8=0\\
&\Leftrightarrow x^3+3\mathrm{i}x^2y-3xy^2-\mathrm{i}y^3+8=0\\
&\Leftrightarrow x^3-3xy^2+8=0 \wedge 3x^2y-y^3=0\\
&\Leftrightarrow x^3-3xy^2+8=0 \wedge y(3x^2-y^2)=0\\
&\Leftrightarrow x^3-3xy^2+8=0 \wedge (y=0 \vee y=x\sqrt{3} \vee y=-x\sqrt{3}).
\end{aligned}$$

Wir betrachten die einzelnen Fälle.

- Ist $y=0$, so gilt
$$x^3+8=0 \Leftrightarrow x=-\sqrt[3]{8}=-2$$
für alle $x\in\mathbb{R}$.

- Ist $y=x\sqrt{3}$, so gilt
$$x^3-9x^3+8=0 \Leftrightarrow x^3=1 \Leftrightarrow x=1$$
für alle $x\in\mathbb{R}$. Das gibt die Lösung $z=1+\mathrm{i}\sqrt{3}$.

- Ist $y=-x\sqrt{3}$, so gilt
$$x^3-9x^3+8=0 \Leftrightarrow x^3=1 \Leftrightarrow x=1$$
für alle $x\in\mathbb{R}$. Das gibt die Lösung $z=1-\mathrm{i}\sqrt{3}$.

Insgesamt sind also genau $z_0=-2$, $z_1=1+\mathrm{i}\sqrt{3}$ und $z_2=1-\mathrm{i}\sqrt{3}$ Lösungen der Gleichung $z^3+8=0$.

□

Aufgabe 18:

(a) (i) Es gilt
$$z\cdot w=(3-\mathrm{i})\cdot(-1+2\mathrm{i})=-3-2(\mathrm{i})^2+\mathrm{i}(1+6)=-1+7\mathrm{i}$$
und damit $\mathrm{Re}(z\cdot w)=-1$, $\mathrm{Im}(z\cdot w)=7$, $|z\cdot w|=|z|\cdot|w|=5\sqrt{2}$.

(ii) Es gilt

$$\begin{aligned}
\overline{z}^2+\frac{1}{w^2} &= (3+\mathrm{i})^2+\frac{\overline{w}^2}{|w|^4}=3^2+6\mathrm{i}-1+\frac{(-1-2\mathrm{i})^2}{25}=8+6\mathrm{i}+\frac{1}{25}(1+4\mathrm{i}-4)\\
&= 8-\frac{3}{25}+\left(6+\frac{4}{25}\right)\mathrm{i}
\end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned}
\mathrm{Re}(\overline{z}^2+\frac{1}{w^2}) &= 8-\frac{3}{25}=\frac{197}{25}, \qquad \mathrm{Im}(\overline{z}^2+\frac{1}{w^2})=6+\frac{4}{25}=\frac{154}{25}, \qquad \text{sowie}\\
\left|\overline{z}^2+\frac{1}{w^2}\right| &= \sqrt{\left(\frac{197}{25}\right)^2+\left(\frac{154}{25}\right)^2}=\frac{1}{25}\sqrt{38809+23716}=\frac{\sqrt{2501}}{5}.
\end{aligned}$$

(b) Dem Hinweis folgend, machen wir den Ansatz $z = (1+\mathrm{i})x$ mit $x \in \mathbb{R}$. Einsetzen in die Gleichung liefert

$$\begin{aligned} & ((1+\mathrm{i})x)^3 - (3-\mathrm{i})((1+\mathrm{i})x)^2 - \mathrm{i}(1+\mathrm{i})x + 1 + 3\mathrm{i} = 0 \\ \Leftrightarrow\ & (1 + 3\mathrm{i} + 3\mathrm{i}^2 - \mathrm{i})x^3 - (3-\mathrm{i})(1 + 2\mathrm{i} + \mathrm{i}^2)x^2 - \mathrm{i}(1+\mathrm{i})x + 1 + 3\mathrm{i} = 0 \\ \Leftrightarrow\ & (-2+2\mathrm{i})x^3 - (3-\mathrm{i})2\mathrm{i}x^2 - \mathrm{i}(1+\mathrm{i})x + 1 + 3\mathrm{i} = 0 \\ \Leftrightarrow\ & -2x^3 - 2x^2 + x + 1 = 0 \wedge 2x^3 - 6x^2 - x + 3 = 0. \end{aligned}$$

Addieren der beiden letzten Gleichungen liefert

$$-8x^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{\sqrt{2}} \vee x = -\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Also sind $z_0 = \frac{1+\mathrm{i}}{\sqrt{2}}$ und $z_1 = \frac{-1-\mathrm{i}}{\sqrt{2}}$ zwei der gesuchten Nullstellen des Polynoms $P(z) = z^3 - (3-\mathrm{i})z^2 - \mathrm{i}z + 1 + 3\mathrm{i}$. Nach dem Satz über die Polynomdivision lässt sich P durch $Q = (z - z_0) \cdot (z - z_1) = (z - \frac{1+\mathrm{i}}{\sqrt{2}}) \cdot (z + \frac{1+\mathrm{i}}{\sqrt{2}}) = \left(z^2 - \frac{(1+\mathrm{i})^2}{2}\right) = z^2 - \mathrm{i}$ dividieren. Tatsächlich ergibt die Polynomdivision

$$z^3 - (3-\mathrm{i})z^2 - \mathrm{i}z + 1 + 3\mathrm{i} = (z^2 - \mathrm{i}) \cdot (z - (3-\mathrm{i})).$$

Die letzte Nullstelle lautet also $z_2 = (3-\mathrm{i})$.

□