

Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Physik

4. Übungsblatt

Aufgabe 19:

Sei (a_n) eine reelle oder komplexe Zahlenfolge. Zeigen Sie, dass (a_n) genau dann gegen ein $a \in \mathbb{C}$ konvergiert, wenn (a_{2n}) und (a_{2n+1}) konvergieren und $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n+1} = a$ gilt.

Aufgabe 20: [Übliche Grenzwert-Sätze T]

Seien $(a_n), (b_n)$ komplexe, konvergente Zahlenfolgen — etwa $a_n \rightarrow a \in \mathbb{C}$ und $b_n \rightarrow b \in \mathbb{C}$. Zeigen Sie

(i) $a_n b_n \rightarrow ab$,

(ii) falls $b \neq 0$, so ist $b_n \neq 0$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$ und $\frac{a_n}{b_n} \rightarrow \frac{a}{b}$.

Aufgabe 21: [Grenzwerte T]

Untersuchen Sie die nachstehend definierten Folgen auf Konvergenz und bestimmen Sie ggf. den jeweiligen Grenzwert.

(i) $(a_n) = \left(\frac{6n^2 + 3n - 4}{1 + n^2 + 5n^3} \right)_{n \in \mathbb{N}}$,

(ii) $(b_n) = \left(\sqrt[n]{2^n + 3^n} \right)_{n \in \mathbb{N}}$,

(iii) $(c_n) = \left(\sqrt{9n^2 + 2n + 1} - 3n \right)_{n \in \mathbb{N}}$,

(iv) $(d_n) = \left(\sum_{k=1}^{n^2} \frac{k}{n^4} \right)_{n \in \mathbb{N}}$,

(v) $(e_n) = \left(\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \right)_{n \in \mathbb{N}}$,

(vi) $(f_n) = \left(\sqrt[n]{n!} \right)_{n \in \mathbb{N}}$.

Aufgabe 22:

Untersuchen Sie die nachstehend definierten Folgen auf Konvergenz und bestimmen Sie ggf. den jeweiligen Grenzwert.

$$(i) (a_n) = \left(\frac{n^2-1}{n+3} - \frac{n^3+1}{n^2+1} \right)_{n \in \mathbb{N}},$$

$$(ii) (b_n) = \left(\sqrt[n]{\frac{1}{2^n} + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{1}{3^{n+k}}} \right)_{n \in \mathbb{N}},$$

$$(iii) (c_n) = \left(\sqrt{4n^2 + 8064n + 2016} - 2n \right)_{n \in \mathbb{N}},$$

$$(iv) d_n = \begin{cases} \frac{1}{2} + \left(\frac{3+4i}{15}\right)^n & \text{für gerade } n, \\ \sqrt{n + \sqrt{n}} - \sqrt{n} & \text{für ungerade } n \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

$$(v) (e_n) = \left(\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n \right)_{n \in \mathbb{N}},$$

$$(vi) (f_n) = \left(\frac{a^n - a^{-n}}{a^n + a^{-n}} \right)_{n \in \mathbb{N}}, \quad a > 0 \text{ fest.}$$

Aufgabe 23: [Rekursiv Definierte Folgen **T**]

Untersuchen Sie die durch

$$a_1 = \sqrt{2}, \quad a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

rekursiv definierte Folge (a_n) auf Konvergenz und bestimmen Sie ggf. ihren Grenzwert.

Aufgabe 24:

Untersuchen Sie die durch

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \frac{2 + 4a_n}{4 + 3a_n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

rekursiv definierte Folge (a_n) auf Konvergenz und bestimmen Sie ggf. ihren Grenzwert.