

Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Physik

Lösungsvorschläge zum 4. Übungsblatt

Aufgabe 19:

- \Rightarrow : Sei (a_n) konvergent gegen $a \in \mathbb{C}$. Zu zeigen ist, dass $a_{2n} \rightarrow a$ und $a_{2n+1} \rightarrow a$ für $n \rightarrow \infty$. Sei dazu $\varepsilon > 0$ vorgelegt. Da $a_n \rightarrow a$, existiert ein $n_0(\varepsilon)$ so, dass $|a_n - a| < \varepsilon$ für alle $n \geq n_0(\varepsilon)$. Wegen $2k + 1 > 2k > k$ für alle $k \in \mathbb{N}$, gilt erst recht $|a_{2n} - a| < \varepsilon$ und $|a_{2n+1} - a| < \varepsilon$ für alle $n \geq n_0(\varepsilon)$. Dies beweist die Konvergenz von (a_{2n}) und (a_{2n+1}) gegen a .
- \Leftarrow : Seien (a_{2n}) und (a_{2n+1}) konvergent gegen ein $a \in \mathbb{C}$. Zu zeigen ist, dass (a_n) gegen a konvergiert. Sei dazu ein $\varepsilon > 0$ vorgelegt. Da $a_{2n+1} \rightarrow a$ und $a_{2n} \rightarrow a$, existieren $n_1(\varepsilon), n_2(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ derart, dass

$$|a_{2n+1} - a| < \varepsilon \quad \forall n \geq n_1(\varepsilon) \quad \text{und} \quad |a_{2n} - a| < \varepsilon \quad \forall n \geq n_2(\varepsilon).$$

Definiere $n_0(\varepsilon) := 2 \cdot \max\{n_1(\varepsilon), n_2(\varepsilon)\} + 1$. Für alle $n \geq n_0(\varepsilon)$ gilt $|a_n - a| < \varepsilon$, denn: Ist $n > n_0(\varepsilon)$ ungerade, also $n = 2k + 1$ für ein $k \in \mathbb{N}_0$, so gilt

$$n = 2k + 1 \geq n_0(\varepsilon) = 2 \cdot \max\{n_1(\varepsilon), n_2(\varepsilon)\} + 1 \Rightarrow k \geq n_1(\varepsilon).$$

Ist n gerade, also $n = 2k$ für ein $k \in \mathbb{N}$, so gilt

$$n = 2k \geq n_0(\varepsilon) = 2 \cdot \max\{n_1(\varepsilon), n_2(\varepsilon)\} + 1 \geq 2 \cdot \max\{n_1(\varepsilon), n_2(\varepsilon)\} \geq 2n_2(\varepsilon) \Rightarrow k \geq n_2(\varepsilon).$$

In beiden Fällen gilt nach Voraussetzung $|a_n - a| < \varepsilon$.

□

Aufgabe 20:

Nach Bemerkung (c) im Abschnitt 6.2 des Skriptes, ist eine komplexe Folge (z_n) genau dann gegen ein $z_0 \in \mathbb{C}$ konvergent, wenn $\operatorname{Re}(z_n) \rightarrow \operatorname{Re}(z_0)$ und $\operatorname{Im}(z_n) \rightarrow \operatorname{Im}(z_0)$. Seien $a_n \rightarrow a \in \mathbb{C}$ und $b_n \rightarrow b \in \mathbb{C}$. Nach Obigem gilt $\operatorname{Re}(a_n) \rightarrow \operatorname{Re}(a)$, $\operatorname{Im}(a_n) \rightarrow \operatorname{Im}(a)$, $\operatorname{Re}(b_n) \rightarrow \operatorname{Re}(b)$ und $\operatorname{Im}(b_n) \rightarrow \operatorname{Im}(b)$.

(i) Nach den Grenzwertsätzen (5) aus Abschnitt 6.3 des Skriptes gilt

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(a_n b_n) &= \operatorname{Re}(a_n) \operatorname{Re}(b_n) - \operatorname{Im}(a_n) \operatorname{Im}(b_n) \rightarrow \operatorname{Re}(a) \operatorname{Re}(b) - \operatorname{Im}(a) \operatorname{Im}(b) = \operatorname{Re}(ab), \\ \operatorname{Im}(a_n b_n) &= \operatorname{Re}(a_n) \operatorname{Im}(b_n) + \operatorname{Im}(a_n) \operatorname{Re}(b_n) \rightarrow \operatorname{Re}(a) \operatorname{Im}(b) + \operatorname{Im}(a) \operatorname{Re}(b) = \operatorname{Im}(ab). \end{aligned}$$

Nach Obigem also tatsächlich $a_n b_n \rightarrow ab$.

- (ii) Da $b \neq 0$, ist $\operatorname{Re}(b) \neq 0$ oder $\operatorname{Im}(b) \neq 0$. Da $\operatorname{Re}(b_n) \rightarrow \operatorname{Re}(b)$ und $\operatorname{Im}(b_n) \rightarrow \operatorname{Im}(b)$, ist nach den Grenzwertsätzen (5) aus Abschnitt 6.3 des Skriptes also $\operatorname{Re}(b_n) \neq 0$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$ oder $\operatorname{Im}(b_n) \neq 0$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$. Da $z = 0 \Leftrightarrow \operatorname{Re}(z) = \operatorname{Im}(z) = 0$ für alle $z \in \mathbb{C}$, ist also tatsächlich $b_n \neq 0$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$. Also gilt $\frac{a_n}{b_n} = \frac{a_n \bar{b}_n}{|b_n|^2} = \frac{1}{|b_n|^2} a_n \bar{b}_n$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$.

Nach Obigem ist

$$\bar{b}_n = \operatorname{Re}(b_n) - i \operatorname{Im}(b_n) \rightarrow \operatorname{Re}(b) - i \operatorname{Im}(b) = \bar{b}$$

und nach den Grenzwertsätzen (5) aus Abschnitt 6.3 des Skriptes

$$|b_n|^2 = \operatorname{Re}(b_n)^2 + \operatorname{Im}(b_n)^2 \rightarrow \operatorname{Re}(b)^2 + \operatorname{Im}(b)^2 = |b|^2.$$

Mit Aufgabenteil (ii) folgt

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{1}{|b_n|^2} (a_n \bar{b}_n) \rightarrow \frac{1}{|b|^2} a \bar{b} = \frac{a}{b}.$$

□

Aufgabe 21:

- (i) Es folgt mit Mitteln der Vorlesung (Kapitel 6 des Skriptes)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6n^2 + 3n - 4}{1 + n^2 + 5n^3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{6}{n} + \frac{3}{n^2} - \frac{4}{n^3}}{\frac{1}{n^3} + \frac{1}{n} + 5} = 0.$$

- (ii) Es gilt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$b_n = \sqrt[n]{2^n + 3^n} \geq \sqrt[n]{3^n} = 3,$$

sowie

$$b_n = \sqrt[n]{2^n + 3^n} = 3 \sqrt[n]{1 + \left(\frac{2}{3}\right)^n} \leq 3 \sqrt[n]{2}.$$

Wegen $\sqrt[n]{2} \rightarrow 1$ (Beispiel 6.5 (2) der Vorlesung), gilt nach dem Sandwichtheorem ((3) in Abschnitt 6.3 des Skriptes) $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 3$.

- (iii) Es gilt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} c_n = \sqrt{9n^2 + 2n + 1} - 3n &= \left(\sqrt{9n^2 + 2n + 1} - 3n \right) \cdot \frac{\sqrt{9n^2 + 2n + 1} + 3n}{\sqrt{9n^2 + 2n + 1} + 3n} \\ &= \frac{2n + 1}{\sqrt{9n^2 + 2n + 1} + 3n} = \frac{2 + \frac{1}{n}}{\sqrt{9 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n}} + 3}. \end{aligned}$$

Mit den Mitteln der Vorlesung (Kapitel 6 des Skriptes) und dieser Darstellung folgt $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{2}{\sqrt{9+3}} = \frac{1}{3}$.

(iv) Es gilt nach Beispiel (2) im Abschnitt 4.8 des Skriptes

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{n^2} \frac{k}{n^4} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^4} \sum_{k=1}^{n^2} k = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^4} \frac{n^2(n^2+1)}{2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} + \frac{1}{2n^2} = \frac{1}{2}.$$

(v) Für jedes $n \geq 2$ gilt

$$\begin{aligned} e_n &= \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \left(\frac{n-1}{n}\right)^n = \left(\frac{n}{n-1}\right)^{-n} = \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{-n} \\ &= \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{-1} \cdot \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{1-n} = \frac{1 - \frac{1}{n}}{\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1}} \end{aligned}$$

Der Zähler konvergiert mit Mitteln der Vorlesung gegen 1. Der Nenner konvergiert nach Abschnitt 6.6 des Skriptes gegen die Eulersche Zahl. Also gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} e_n = \frac{1}{e}$.

(vi) Konvergente Folgen sind beschränkt (Bemerkung (b) im Abschnitt 6.2 des Skriptes). Wir zeigen, dass (f_n) unbeschränkt ist und damit nicht konvergent sein kann. Sei dazu $k \in \mathbb{N}$. Es ist

$$(2k)! = \underbrace{2k \cdot (2k-1) \cdot \dots \cdot (k+1)}_{k \text{ Faktoren, jeder } \geq k} \cdot \underbrace{k \cdot \dots \cdot 1}_{\geq 1} \geq k^k.$$

Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt damit

$$f_{2n^2} = \sqrt[2n^2]{(2n^2)!} \geq \sqrt[2n^2]{(n^2)^{n^2}} = \sqrt[2n^2]{n^{2n^2}} = n.$$

Da die natürlichen Zahlen nicht nach oben beschränkt sind (Satz (2) im Abschnitt 4.7 des Skriptes), ist $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in der Tat nicht nach oben beschränkt.

□

Aufgabe 22:

(i) Es folgt mit Mitteln der Vorlesung (Kapitel 6 des Skriptes)

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} a_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2-1}{n+3} - \frac{n^3+1}{n^2+1} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n^2-1)(n^2+1) - (n^3+1)(n+3)}{(n^2+1)(n+3)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^4-1 - (n^4+3n^3+n+3)}{(n^2+1)(n+3)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-3n^3-n-4}{(n^2+1)(n+3)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-3 - \frac{1}{n^2} - \frac{4}{n^3}}{\left(1 + \frac{1}{n^2}\right) \left(1 + \frac{3}{n}\right)} = -3. \end{aligned}$$

(ii) Nach dem Binomialsatz aus Abschnitt 4.11 des Skriptes gilt für jedes $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} b_n &= \sqrt[n]{\frac{1}{2^n} + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{1}{3^{n+k}}} = \sqrt[n]{\frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{1}{3^k} 1^{n-k}} \\ &= \sqrt[n]{\frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} \left(1 + \frac{1}{3}\right)^n} = \sqrt[n]{\left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{4}{9}\right)^n}. \end{aligned}$$

Also gilt

$$\frac{1}{2} = \sqrt[n]{\left(\frac{1}{2}\right)^n} \leq \underbrace{\sqrt[n]{\left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{4}{9}\right)^n}}_{=b_n} \leq \sqrt[n]{\left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{4}{8}\right)^n} = \frac{1}{2} \sqrt[n]{2}$$

für jedes $n \in \mathbb{N}$.

Wegen $\sqrt[n]{2} \rightarrow 1$ (Beispiel 6.5 (2) der Vorlesung), gilt nach dem Sandwichtheorem ((3) in Abschnitt 6.3 des Skriptes) $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \frac{1}{2}$.

(iii) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\begin{aligned} \sqrt{4n^2 + 8064n + 2016} - 2n &= \left(\sqrt{4n^2 + 8064n + 2016} - 2n \right) \cdot \frac{\sqrt{4n^2 + 8064n + 2016} + 2n}{\sqrt{4n^2 + 8064n + 2016} + 2n} \\ &\stackrel{3. \text{ Binom.}}{=} \frac{4n^2 + 8064n + 2016 - 4n^2}{\sqrt{4n^2 + 8064n + 2016} + 2n} \\ &= \frac{8064n + 2016}{\sqrt{4n^2 + 8064n + 2016} + 2n} \\ &= \frac{8064 + \frac{2016}{n}}{2 \left(\sqrt{1 + \frac{8064}{4n} + \frac{2016}{4n^2}} + 1 \right)} \\ &= \frac{8064 + \frac{2016}{n}}{2 \left(\sqrt{1 + \frac{8064}{4n} + \frac{2016}{4n^2}} + 1 \right)} \end{aligned}$$

Mit den Mitteln der Vorlesung (Kapitel 6 des Skriptes) und dieser Darstellung folgt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{4n^2 + 8064n + 2016} - 2n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{8064 + \frac{2016}{n}}{2 \left(\sqrt{1 + \frac{8064}{4n} + \frac{2016}{4n^2}} + 1 \right)} = \frac{8064}{2 \cdot 2} = 2016.$$

(iv) Betrachte die Teilfolgen $(d_{2k})_{k \in \mathbb{N}}$, sowie $(d_{2k+1})_{k \in \mathbb{N}}$. Es gilt $\left| \frac{3+4i}{15} \right| = \frac{\sqrt{9+16}}{15} = \frac{\sqrt{25}}{15} = \frac{1}{3}$ und damit (Kapitel 6 des Skriptes) $\lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{3+4i}{15} \right)^{2k} = 0$. Hieraus folgt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} d_{2k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{2} + \left(\frac{3+4i}{15} \right)^{2k} = \frac{1}{2}.$$

Ferner gilt

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} d_{2k+1} &= \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt{(2k+1) + \sqrt{2k+1}} - \sqrt{2k+1} \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\sqrt{(2k+1) + \sqrt{2k+1}} - \sqrt{2k+1} \right) \cdot \frac{\sqrt{(2k+1) + \sqrt{2k+1}} + \sqrt{2k+1}}{\sqrt{(2k+1) + \sqrt{2k+1}} + \sqrt{2k+1}} \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2k+1}}{\sqrt{(2k+1) + \sqrt{2k+1}} + \sqrt{2k+1}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{\sqrt{2k+1}}} + 1} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Nach Aufgabe 19 folgt, dass $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen $\frac{1}{2}$ konvergiert.

- (v) Nach Abschnitt 6.6 des Skriptes konvergiert $(\tilde{e}_n) := \left(\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^{n^2} \right)$ gegen die Eulersche Zahl. Insbesondere ist (\tilde{e}_n) beschränkt, etwa $\tilde{e}_n \leq 4$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Es gilt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$1 \leq e_n = \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n = \sqrt[n]{\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^{n^2}} \leq \sqrt[n]{4}$$

Wegen $\sqrt[n]{4} \rightarrow 1$ (Beispiel 6.5 (2) der Vorlesung), gilt nach dem Sandwichtheorem ((3) in Abschnitt 6.3 des Skriptes) $\lim_{n \rightarrow \infty} e_n = 1$.

- (vi) Wir unterscheiden die folgenden drei Fälle und benutzen jeweils die Ergebnisse des Kapitels 6 des Skriptes.

- Ist $a > 1$, so gilt $\frac{1}{a} < 1$ und damit $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{a}\right)^{2n} = 0$. Es folgt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n - a^{-n}}{a^n + a^{-n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - a^{-2n}}{1 + a^{-2n}} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} 1 - \left(\frac{1}{a}\right)^{2n}}{\lim_{n \rightarrow \infty} 1 + \left(\frac{1}{a}\right)^{2n}} = 1.$$

- Ist $a = 1$, so gilt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\frac{a^n - a^{-n}}{a^n + a^{-n}} = \frac{0}{2} = 0$$

und damit $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

- Ist $a < 0$, so gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} a^{2n} = 0$. Es folgt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n - a^{-n}}{a^n + a^{-n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^{2n} - 1}{a^{2n} + 1} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a^{2n} - 1}{\lim_{n \rightarrow \infty} a^{2n} + 1} = -1.$$

□

Aufgabe 23:

Angenommen, (a_n) ist konvergent gegen $a \in \mathbb{R}$. Induktiv sieht man ein, dass $a_n \geq \sqrt{2} \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Nach (3) im Satz aus dem Abschnitt 6.3 des Skriptes gilt also $a \geq 0$. Ferner gilt

$$a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{2 + a_n} = \sqrt{\lim_{n \rightarrow \infty} 2 + a_n} = \sqrt{2 + \lim_{n \rightarrow \infty} a_n} = \sqrt{2 + a}.$$

Auflösen nach a liefert

$$a^2 = |2 + a| \stackrel{a \geq 0}{\Leftrightarrow} a^2 = 2 + a \Leftrightarrow a^2 - a - 2 = 0 \Leftrightarrow a \in \left\{ \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} + 2}, \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + 2} \right\} = \{-1, 2\}.$$

Wegen $a_n \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, ist $a = 2$ der einzige Kandidat für den Grenzwert. Wegen $a_1 = \sqrt{2} < 2$ liegt die Vermutung nahe, dass (a_n) monoton wachsend ist. Für $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= \sqrt{2 + a_n} - a_n = \frac{2 + a_n - a_n^2}{\sqrt{2 + a_n} + a_n} \geq 0 \\ \Leftrightarrow a_n^2 - a_n - 2 &= \left(a_n - \frac{1}{2}\right)^2 - 2 - \frac{1}{4} \leq 0 \\ \Leftrightarrow \left(a_n - \frac{1}{2}\right)^2 &\leq \frac{9}{4} \\ \stackrel{a_n \geq \sqrt{2} > \frac{1}{2}}{\Leftrightarrow} a_n &\leq \frac{1}{2} + \frac{3}{2} = 2. \end{aligned}$$

Also ist (a_n) monoton wachsend, falls $a_n \leq 2$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Die letzte Aussage beweisen wir durch vollständige Induktion über n .

- *IA* ($n = 1$): In der Tat ist $a_1 = \sqrt{2} \leq 2$.
- *IS* ($n \rightsquigarrow n + 1$): Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig. Für dieses n gelte die *IV* $a_n \leq 2$. Dann gilt für $n + 1$ tatsächlich $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n} \stackrel{(IV)}{\leq} \sqrt{2 + 2} = 2$.

Also ist (a_n) nach oben beschränkt und monoton wachsend. Nach dem Satz aus Abschnitt 6.4 des Skriptes ist (a_n) konvergent. Nach Obigem ist $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 2$. \square

Aufgabe 24:

Angenommen, (a_n) ist konvergent gegen $a \in \mathbb{R}$. Induktiv sieht man ein, dass $a_n \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Nach (3) im Satz aus dem Abschnitt 6.3 des Skriptes gilt also $a \geq 0$. Ferner gilt

$$a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 + 4a_n}{4 + 3a_n} = \frac{2 + 4a}{4 + 3a}.$$

Auflösen nach a liefert

$$4a + 3a^2 = 2 + 4a \Leftrightarrow a^2 = \frac{2}{3} \stackrel{a \geq 0}{\Leftrightarrow} a = \sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Also ist $a = \sqrt{\frac{2}{3}}$ der einzige Kandidat für den Grenzwert. Wegen $a_1 = 1 > a$, liegt die Vermutung nahe, dass (a_n) monoton fallend ist. Für $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$a_{n+1} - a_n = \frac{2 + 4a_n}{4 + 3a_n} - a_n \leq 0 \stackrel{a_n \geq 0}{\Leftrightarrow} 2 + 4a_n \leq 4a_n + 3a_n^2 \Leftrightarrow \frac{2}{3} \leq a_n^2 \stackrel{a_n \geq 0}{\Leftrightarrow} \sqrt{\frac{2}{3}} \leq a_n.$$

Also ist (a_n) monoton fallend, falls $a_n \geq \sqrt{\frac{2}{3}}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Die letzte Aussage beweisen wir durch vollständige Induktion über n .

- *IA* ($n = 1$): In der Tat ist $a_1 = 1 \geq \sqrt{\frac{2}{3}}$.
- *IS* ($n \rightsquigarrow n + 1$): Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig. Für dieses n gelte die *IV* $a_n \geq \sqrt{\frac{2}{3}}$. Dann gilt für $n + 1$ tatsächlich

$$\begin{aligned} a_{n+1} &\geq \sqrt{\frac{2}{3}} \stackrel{a_{n+1} \geq 0}{\Leftrightarrow} a_{n+1}^2 = \left(\frac{2 + 4a_n}{4 + 3a_n} \right)^2 \geq \frac{2}{3} \Leftrightarrow 3(2 + 4a_n)^2 \geq 2(4 + 3a_n)^2 \\ &\Leftrightarrow 12 + 48a_n + 48a_n^2 \geq 32 + 48a_n + 18a_n^2 \Leftrightarrow 30a_n^2 \geq 20 \stackrel{a_n \geq 0}{\Leftrightarrow} a_n \geq \sqrt{\frac{2}{3}} \Leftrightarrow (IV). \end{aligned}$$

Also ist (a_n) nach unten beschränkt und monoton fallend. Nach dem Satz aus Abschnitt 6.4 des Skriptes ist (a_n) konvergent. Nach Obigem ist $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sqrt{\frac{2}{3}}$. \square