Institut für Analysis
apl. Prof. Dr. Peer Christian Kunstmann
Marvin Schulz, M.Sc.

WS2024/25
22.11.2024

Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Physik

5. Übungsblatt

Aufgabe 25:
Die Folge (a_n) sei durch

$$a_n := \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{für gerade } n, \\ \frac{1}{2^n} & \text{für ungerade } n, \end{cases}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ definiert.

(a) Zeigen Sie $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

(b) Zeigen Sie, dass die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ divergent ist.

(c) Warum ist das Leibniz-Kriterium hier nicht anwendbar?

Aufgabe 26: [Leibniz-Kriterium **T**]
Die Folge (a_n) sei durch $a_n := \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ definiert.

(a) Zeigen Sie, dass $a_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

(b) Zeigen Sie, dass die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ divergent ist.

(c) Warum ist das Leibniz-Kriterium hier nicht anwendbar?

Aufgabe 27:
Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz und bestimmen Sie ggf. den Reihenwert.

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)!}$,

(ii) $\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{2^{n+k}}$.

Aufgabe 28: [Konvergenz von Reihen **T**]
Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz und bestimmen Sie ggf. den Reihenwert.

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1-\frac{n}{e})e^{-n}}{n(n+1)}$,

(ii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(4x)^n}{(1+2|x|)^{n-1}}$ mit $x \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 29:
Untersuchen Sie die folgenden Reihen jeweils auf Konvergenz und absolute Konvergenz.

(i) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\binom{2n}{n}$,

(ii) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$,

(iii) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(1-\sqrt[n]{a})$ mit $0<a<1$,

(iv) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}$,

(v) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+4}{n^2-3n+1}$,

(vi) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left[\frac{1}{n+3}-\frac{1}{n+2}\right]$.

Aufgabe 30: [(absolute) Konvergenz von Reihen **T**]
Untersuchen Sie die folgenden Reihen jeweils auf Konvergenz und absolute Konvergenz.

(i) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{1+x^{4n}}$ mit $x \in \mathbb{R}$,

(ii) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)^{n^2}$,

(iii) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathrm{i}^n}{n}$,

(iv) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)!}{(3n)^n n!}$,

(v) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\sqrt{n}-2)^2}{n^2+\sqrt{n^4+1}}$,

(vi) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt[n]{n}-\sqrt[n+1]{n+1}}{n}$.