Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Analysis
apl. Prof. Dr. Peer Christian Kunstmann
Marvin Schulz, M.Sc.

WS2024/25
29.11.2024

Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Physik

6. Übungsblatt

Aufgabe 31:
Untersuchen Sie die Konvergenz der Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{2}(-1)^n\right)^n}{n^2}$$

(a) mit dem Quotientenkriterium bzw.

(b) mit dem Wurzelkriterium.

Aufgabe 32: [Potenzreihen und Konvergenzradius **T**]
Sei für alle $n \in \mathbb{N}_0$

$$a_n = \left(\sum_{k=0}^{n} \left(\frac{(-1)^n + \frac{1}{2}}{3} \right)^k \right)^n .$$

(a) Berechnen Sie den Konvergenzradius R von $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$.

(b) Zeigen Sie $\liminf_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = 0$ und $\limsup_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \infty$. Welche Abschätzungen für R ergeben sich dadurch?

Hinweis: Benutzen Sie für (a) die geometrische Reihenformel. Benutzen Sie in (b) die endl. geom. Reihenformel und schätzen Sie den Quotienten geeignet ab.

Aufgabe 33:
Zeigen Sie, dass die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}} = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \dots$$

konvergiert, die aus ihr durch Umordnung hervorgehende Reihe

$$1 + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{7}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{9}} + \frac{1}{\sqrt{11}} - \frac{1}{\sqrt{6}} + \dots$$

jedoch divergiert.

Aufgabe 34: [Absolute Konvergenz und Cauchy-Produkt **T**]
Sie für alle $n \in \mathbb{N}_0$

$$b_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}.$$

(a) Zeigen Sie, dass die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ konvergent, aber nicht absolut konvergent ist.

(b) Zeigen Sie, dass das Cauchyprodukt von $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ mit sich selbst divergiert.

Hinweis: Es gilt $ab \leq \frac{a^2+b^2}{2}$ für alle $a, b \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 35:
Für welche $z \in \mathbb{C}$ bzw. $x \in \mathbb{R}$ konvergieren die folgenden Potenzreihen?

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right) z^n$

(ii) $\sum_{n=1}^{\infty} e^{n(1+(-1)^n)} z^{2n}$

(iii) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} z^{2n+1}$

(iv) $\sum_{n=0}^{\infty} n! z^n$

(v) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n+\sqrt{n}}$

Aufgabe 36: [Vertiefende Übung Potenzreihen **T**]
Für welche $z \in \mathbb{C}$ bzw. $x \in \mathbb{R}$ konvergieren die folgenden Potenzreihen?

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^n} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}\right) z^{2n}$

(ii) $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n z^{(n^2)}$

(iii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n} (z - 2\mathrm{i})^n$

(iv) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n+1}{(n-1)^2} x^n$

(v) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} z^n$