

## Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Physik

### 7. Übungsblatt

#### Aufgabe 37:

- (a) Seien  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ ,  $\sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k$  Potenzreihen mit Konvergenzradien  $R_1 > 0$  bzw.  $R_2 > 0$ . Zeigen Sie, dass die Potenzreihe  $\sum_{n=0}^{\infty} (\sum_{k=0}^n a_{n-k} b_k) z^n$  Konvergenzradius  $R \geq \min\{R_1, R_2\}$  hat und

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{k=0}^n a_{n-k} b_k \right) z^n = \left( \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \right) \cdot \left( \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n \right)$$

für  $|z| < \min\{R_1, R_2\}$  gilt.

- (b) Berechnen Sie für jedes  $k \in \mathbb{N}_0$  den Konvergenzradius  $R$  der Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k}{k} z^n$$

und geben Sie für  $|z| < R$  den Reihenwert an.

**Hinweis:** Cauchyprodukt geometrischer Reihen

#### Aufgabe 38: [ Potenzreihen **T** ]

Für welche  $z \in \mathbb{C}$  konvergieren die folgenden Potenzreihen? Bestimmen Sie im Falle der Konvergenz jeweils den Reihenwert.

(i)  $\sum_{n=1}^{\infty} n z^n$ ,

(ii)  $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 z^n$ .

#### Aufgabe 39:

Für  $n \in \mathbb{N}_0$  ist der  $n$ -te *Dirichlet-Kern*  $D_n$  durch  $D_n(z) = \sum_{k=-n}^n e^{ikz}$  für alle  $z \in \mathbb{C}$  gegeben. Zeigen Sie für jedes  $n \in \mathbb{N}_0$  und  $z \in D := \{z \in \mathbb{C} \mid \sin(z) \neq 0\}$  die Identitäten

$$D_n(2z) = 1 + 2 \sum_{k=1}^n \cos(2kz) = \frac{\sin((2n+1)z)}{\sin(z)}.$$

**Hinweis:** Geometrische Summenformel.

**Aufgabe 40:** [ Trigonometrische Funktionen **T** ]

Sei  $D := \{z \in \mathbb{C} \mid \cos(z) \neq 0\}$  und  $\tan(z) = \frac{\sin(z)}{\cos(z)}$  für alle  $z \in D$ . Zeigen Sie

$$(i) \sin(2x) = \frac{2 \tan(x)}{1 + \tan^2(x)},$$

$$(ii) \cos(2x) = \frac{1 - \tan^2(x)}{1 + \tan^2(x)}$$

für alle  $x \in D \cap \mathbb{R}$ .

**Aufgabe 41:**

Seien  $U_1, U_2$  Untervektorräume eines  $\mathbb{K}$ -Vektorraums  $W$ .

(a) Geben Sie ein Beispiel für  $U_1, U_2$  und  $W$ , sodass  $U_1 \cup U_2$  kein Untervektorraum ist. Wobei

$$U_1 \cup U_2 = \{v \in W \mid v \in U_1 \text{ oder } v \in U_2\}$$

(b) Zeigen Sie, falls  $U_1 \cup U_2$  ein Untervektorraum von  $W$  ist, dann ist  $U_1 \subseteq U_2$  oder  $U_2 \subseteq U_1$ .

(c) Zeigen Sie, dass

$$U_1 \cap U_2 = \{v \in W \mid v \in U_1 \text{ und } v \in U_2\}$$

ein Untervektorraum von  $W$  ist.

**Aufgabe 42:** [ Vektorräume **T** ]

Welche der Mengen

$$(i) \{f \in \mathbb{R}^{[-1,1]} \mid f \text{ hat mindestens eine Nullstelle}\},$$

$$(ii) \{(a_n) \in c \mid \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a\} \text{ mit einem festen } a \in \mathbb{R},$$

$$(iii) \{f \in \mathbb{R}^{[-1,1]} \mid f(0) = 0\}$$

sind Untervektorräume des  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  bzw. des  $\mathbb{R}^{[-1,1]}$ ?