

## Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Physik

### 8. Übungsblatt

#### Aufgabe 43:

Untersuchen Sie

- (i) die Funktionenfolge  $(f_n)$  mit  $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  und  $f_n(x) = \frac{nx^2}{1+n^2x^4}$  für alle  $x \in \mathbb{R}$  und alle  $n \in \mathbb{N}$ ,
- (ii) die Funktionenfolge  $(h_n)$  mit  $h_n : [a, 1] \rightarrow \mathbb{R}$   $h_n(x) = \sqrt[n]{n^2x}$  für alle  $x \in [a, 1]$  und alle  $n \in \mathbb{N}$ , wobei  $0 \leq a < 1$  fest ist,

auf punktweise und gleichmäßige Konvergenz. Bestimmen Sie jeweils eine Konstante  $y_0$  so, dass die Funktion  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  auf ihrem ganzen Definitionsbereich  $D$  stetig ist.

- (i)  $D = [0, 1]$ ,  $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-1} + \frac{3}{(x^2-4)(x-1)} & \text{für } x \in D \setminus \{1\}, \\ y_0 & \text{für } x = 1. \end{cases}$
- (ii)  $D = (0, \infty)$ ,  $f(x) = \begin{cases} \frac{x^r-1}{x-1} & \text{für } x \in D \setminus \{1\}, \\ y_0 & \text{für } x = 1, \end{cases}$  für ein festes  $r \in \mathbb{Q}$ .

#### Aufgabe 44: [ Stetigkeit sowie pktw. und glm. Konvergenz **T** ]

Untersuchen Sie

- (i) die Funktionenreihe  $\sum_{n=0}^{\infty} g_n$  mit  $g_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  und  $g_n(x) = e^{-n(1+x+x^2)}$  für alle  $x \in \mathbb{R}$  und alle  $n \in \mathbb{N}_0$ , sowie
- (ii) die Funktionenfolge  $(h_n)$  mit  $h_n : [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  und  $h_n(x) = \frac{1}{1+nx}$  für alle  $x \in [a, \infty)$  und alle  $n \in \mathbb{N}$ , wobei  $0 \leq a < 1$  fest ist,

auf punktweise und gleichmäßige Konvergenz. Bestimmen Sie jeweils eine Konstante  $y_0$  so, dass die Funktion  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  auf ihrem ganzen Definitionsbereich  $D$  stetig ist.

- (i)  $D = [0, \pi]$ ,  $f(x) = \begin{cases} \frac{x \sin(x)}{\cos(x)-1} & \text{für } x \in D \setminus \{0\}, \\ y_0 & \text{für } x = 0. \end{cases}$
- (ii)  $D = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ ,  $f(x) = \begin{cases} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin(x)} & \text{für } x \in D \setminus \{0\} \\ y_0 & \text{für } x = 0. \end{cases}$

#### Aufgabe 45:

Sei  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetige Funktion mit

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0.$$

Zeigen Sie, dass es ein  $x_M \in \mathbb{R}$  gibt, für welches

$$|f(x)| \leq |f(x_M)|$$

für alle  $x \in \mathbb{R}$  ausfällt.

**Aufgabe 46:** [ Zwischenwertsatz **T** ]

Sei  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetige Funktion mit  $f(0) = f(1) =: y_0$ . Zeigen Sie, dass dann ein  $x_1 \in [0, \frac{1}{2}]$  existiert mit der Eigenschaft

$$f(x_1) = f\left(\frac{1}{2} + x_1\right).$$

**Aufgabe 47:** [ Additionstheoreme **T** ]

Zeigen Sie die folgenden Identitäten.

(i)  $\tan(x + y) = \frac{\tan(x) + \tan(y)}{1 - \tan(x)\tan(y)}$  für alle  $x, y \in \mathbb{R}$  mit  $x, y, x + y \notin \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}$ .

(ii)  $\arctan(x) + \arctan(y) = \arctan\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)$  für alle  $x, y \in \mathbb{R}$  mit  $|\arctan(x) + \arctan(y)| < \frac{\pi}{2}$ .

**Aufgabe 48:**

Sei  $\emptyset \neq D \subset \mathbb{R}$  abgeschlossen,  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  stetig und  $N := \{x \in D \mid f(x) = 0\}$ . Zeigen Sie die folgenden Aussagen.

(a)  $N$  ist abgeschlossen.

(b) Ist  $N$  nach unten beschränkt und nicht leer, so hat  $N$  ein Minimum.