

Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Physik

9. Übungsblatt

Aufgabe 50: [Differenzierbarkeit **T**]

Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{x + \frac{\sin(x)}{2}} & \text{für } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \\ \frac{2}{3} & \text{für } x = 0. \end{cases}$$

- (a) Zeigen Sie, dass $x \mapsto x + \frac{\sin(x)}{2}$ nur in 0 eine Nullstelle hat.
- (b) Berechnen Sie $f'(x)$ für alle x , in denen f differenzierbar ist.

Aufgabe 51:

Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{x + \frac{\ln(1+x^2)}{2}} & \text{für } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \\ 0 & \text{für } x = 0. \end{cases}$$

- (a) Zeigen Sie, dass $x \mapsto x + \frac{\ln(1+x^2)}{2}$ nur in 0 eine Nullstelle hat.
- (b) Berechnen Sie $f'(x)$ für alle x , in denen f differenzierbar ist.

Aufgabe 52: [Methode der kleinsten Quadrate **T**]

- (i) Sei $f : [-3, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ durch $f(x) = x^4 - 4x^2 + 2$ für alle $x \in [-3, 2]$ definiert. Begründen Sie, warum die Funktion f Maximum und Minimum annimmt und berechnen Sie diese.
- (ii) Für eine physikalische Größe werden bei $n \in \mathbb{N}$ Messungen die Messwerte $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ bestimmt. Als Messergebnis gibt man die Zahl $a \in \mathbb{R}$ an, die

$$\sum_{j=1}^n (a - a_j)^2 = \min \left\{ \sum_{k=1}^n (x - a_k)^2 : x \in \mathbb{R} \right\}$$

erfüllt (*Methode der kleinsten Quadrate*). Berechnen Sie a .

Aufgabe 53:

- (i) Sei $f : [0, 10] \rightarrow \mathbb{R}$ durch $f(x) = -6x + (|x - 3| + 2)^2$ für alle $x \in [0, 10]$ definiert. Begründen Sie, warum die Funktion f Maximum und Minimum annimmt und berechnen Sie diese.

- (ii) Für eine physikalische Größe werden bei $2m + 1$ Messungen mit $m \in \mathbb{N}_0$ die Messwerte $a_1, \dots, a_{2m+1} \in \mathbb{R}$ bestimmt. Als Messergebnis gibt man, alternativ zur Aufgabe 57 (ii), die Zahl a an, die

$$\sum_{j=1}^{2m+1} |a - a_j| = \min \left\{ \sum_{k=1}^{2m+1} |x - a_k| : x \in \mathbb{R} \right\}$$

erfüllt. Begründen Sie, warum a eindeutig bestimmt ist, und berechnen Sie a .

Aufgabe 54: [Grenzwerte **T**]

Berechnen Sie die Grenzwerte

- (i) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x^2+3)}{\ln(x)}$,
- (ii) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1+\cos(\pi x)}{x^2-2x+1}$,
- (iii) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sin(\sqrt{x}) - \sin(\sqrt{x+1}))$.

Aufgabe 55:

Berechnen Sie die Grenzwerte

- (i) $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin(\sin(x))}{x-\pi}$,
- (ii) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos(3x))}{\ln(\cos(2x))}$,
- (iii) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(x \left(\ln \left(1 + \sqrt{1+x^2} \right) - \ln(x) \right) \right)$.