

Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Physik

10. Übungsblatt

Aufgabe 56: [Taylor **T**]

- (i) Die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sei durch $f(x) = x^2 - 2x + 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$ definiert. Bestimmen Sie eine Potenzreihe, die in einer Umgebung von $x_0 = 0$ die Funktion $\frac{1}{f}$ darstellt.
- (ii) Die Funktion $g : (-1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ sei durch $g(x) = \ln(1+x)$ für alle $x \in (-1, \infty)$ definiert. Berechnen Sie das Taylorpolynom $T_4(g; 0)$ und zeigen Sie, dass

$$0 \leq g(x) - T_4(g; 0)(x) \leq \frac{1}{5}x^5$$

für alle $x \geq 0$ gilt.

Aufgabe 57:

- (i) Die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sei durch $f(x) = x^2 + 2x - 3$ für alle $x \in \mathbb{R}$ definiert. Bestimmen Sie eine Potenzreihe, die in einer Umgebung von $x_0 = -1$ die Funktion $\frac{1}{f}$ darstellt.
- (ii) Die Funktion $g : (-1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ sei durch $g(x) = e^{-x} + \frac{1}{1+x}$ für alle $x \in (-1, \infty)$ definiert. Berechnen Sie das Taylorpolynom $T_2(g; \frac{1}{2})$ und geben Sie eine Konstante $C > 0$ an, für die

$$\left| g\left(h + \frac{1}{2}\right) - T_2\left(g; \frac{1}{2}\right)(h) \right| \leq C|h|^3$$

für alle $h \in [-1/2, 1/2]$ gilt.

Aufgabe 58: [Extremwerte **T**] Entscheiden Sie, ob die folgenden Funktionen ihr Maximum und Minimum annehmen, und berechnen Sie dieses gegebenenfalls:

- (i) $f : [-3, 2] \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^4 - 4x^2 + 2$;
- (ii) $g : [-3, 2] \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto (|x| - 1)e^x$.

Aufgabe 59: Entscheiden Sie, ob die folgenden Funktionen ihr Maximum und Minimum annehmen, und berechnen Sie dieses gegebenenfalls:

- (i) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} \frac{\sin(x)}{x} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$;
- (ii) $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto e^{|x|} - e^{-|x|}$.

Aufgabe 60:

- i) Sie $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine konvexe Funktion und $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ und a_1, a_2, \dots, a_n nichtnegative reelle Zahlen. Zeigen Sie, dass dann

$$\varphi \left(\frac{\sum_{i=1}^n a_i x_i}{\sum_{i=1}^n a_i} \right) \leq \frac{\sum_{i=1}^n a_i \varphi(x_i)}{\sum_{i=1}^n a_i}$$

- ii) Zeigen Sie, dass $f : (0, \infty] \rightarrow \mathbb{R}$ mit $x \mapsto \log(x)$ ist konkav.
iii) Zeigen Sie die Ungleichung vom arithmetischen und geometrischen Mittel

$$\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i \right)^n \geq \prod_{i=1}^n a_i$$

HINWEIS ZU (i): Benutze die Bemerkung am Ende von Seite 87 des Skriptes und führe einen Induktionsbeweis.

Aufgabe 61: [Young'sche und Hölder'sche UGL **T**]

- i) Zeigen Sie: Seien $A, B \geq 0$ und $p, q > 1$ mit $1/p + 1/q = 1$, so gilt

$$A^{1/p} B^{1/q} \leq \frac{A}{p} + \frac{B}{q}$$

- ii) Sie $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ sowie $y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ und $p, q > 1$ mit $1/p + 1/q = 1$, so gilt

$$\sum_{j=1}^n |x_j y_j| \leq \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^n |y_i|^q \right)^{1/q}$$

HINWEIS: Benutze die Konvexität der Exponentialfunktion für (i) und benutze (i) um (ii) zu beweisen.