Institut für Analysis
apl. Prof. Dr. Peer Christian Kunstmann
Marvin Schulz, M.Sc.

WS2024/25
11.01.24

Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Physik

Lösungsvorschläge zum 10. Übungsblatt

Aufgabe 56:

(i) Die Menge der Nullstellen von f ist $N(f) = \{1\}$. Also ist $\frac{1}{f}$ auf $D = \mathbb{R} \setminus N(f)$ erklärt. Gesucht ist eine Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ mit positivem Konvergenzradius $r > 0$ und

$$\frac{1}{x^2 - 2x + 1} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \qquad \forall x \in D : |x| < r.$$

Multiplizieren mit dem Nenner der linken Seite liefert die äquivalente Aussage

$$\begin{aligned} 1 &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+2}\right) - 2\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1}\right) + \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right) \\ &\overset{\text{Index-Shift}}{=} \left(\sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} x^n\right) - 2\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} x^n\right) + \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right) \\ &= \left(\sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} x^n\right) - 2\left(a_0 x + \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-1} x^n\right) + \left(a_0 + a_1 x + \sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n\right) \\ &= a_0 + (a_1 - 2a_0)x + \sum_{n=2}^{\infty} (a_{n-2} - 2a_{n-1} + a_n) x^n \qquad \forall x \in D : |x| < r. \end{aligned}$$

Beide Seiten dieser Gleichung sind eine Potenzreihe mit positivem Konvergenzradius. Nach Satz 11.15 des Skriptes (Koeffizientenvergleich) gilt

$$a_0 = 1, \quad a_1 - 2a_0 = 0, \quad \forall n \geq 2 : a_{n-2} - 2a_{n-1} + a_n = 0$$

Die ersten fünf Koeffizienten sind

$$\begin{aligned} &a_0 = 1, && a_2 = 2a_1 - a_0 = 4 - 1 = 3, && a_4 = 2a_3 - a_2 = 8 - 3 = 5. \\ &a_1 = 2a_0 = 2, && a_3 = 2a_2 - a_1 = 6 - 2 = 4, && \end{aligned}$$

Das legt die Vermutung $a_n = n + 1$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ nahe. Wir beweisen dies durch vollständige Induktion über n.

IA ($n = 0$): Klar.

IS ($n \rightsquigarrow n + 1$): Sei $n \in \mathbb{N}_0$ beliebig. Es gelte die *(IV)* $a_k = k + 1$ für alle $k \in \{0, \ldots, n\}$. Dann gilt für $n + 1$ das Folgende. Ist $n = 0$, so ist $a_{n+1} = a_1 = 2 = (n + 1) + 1$. Ist $n \geq 1$, so gilt

$$a_{n+1} = 2a_n - a_{n-1} \overset{\text{(IV)}}{=} 2(n + 1) - (n - 1 + 1) = n + 2 = (n + 1) + 1.$$

Dies schließt den Beweis der Vermutung ab.

Wir müssen noch sicherstellen, dass die gefundene Potenzreihe einen positiven Konvergenzradius hat. Nach der Formel von Cauchy-Hadamard gilt

$$r = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n+1}} = 1 > 0.$$

Für alle $|x| < 1$ gilt also

$$\frac{1}{x^2 - 2x + 1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) x^n.$$

(ii) Die Funktion g ist beliebig oft differenzierbar. Wir berechnen die ersten fünf Ableitungen. Für alle $x \in (-1, \infty)$ gilt

$$\begin{aligned} g(x) &= \ln(1+x), & g^{(2)}(x) &= -\frac{1}{(1+x)^2}, & g^{(4)}(x) &= -\frac{6}{(1+x)^4}, \\ g^{(1)}(x) &= \frac{1}{1+x}, & g^{(3)}(x) &= \frac{2}{(1+x)^3}, & g^{(5)}(x) &= \frac{24}{(1+x)^5}. \end{aligned}$$

Das Taylor-Polynom $T_4(g;0)$ ist laut Abschnitt 11.12 des Skriptes Vorlesung durch

$$T_4(g;0)(x) = \sum_{k=0}^{4} \frac{g^{(k)}(0)}{k!} x^k = \ln(1) + 1x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{2}{6}x^3 - \frac{6}{24}x^4 = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ gegeben.

Sei $x \geq 0$. Nach dem Satz von Taylor aus dem Abschnitt 11.12 des Skriptes gibt es ein $\xi \in (0, x)$ mit

$$g(x) - T_4(g;0)(x) = \frac{g^{(5)}(\xi)}{5!} x^5 = \frac{x^5}{5} \frac{1}{(1+\xi)^5}.$$

Wegen $0 < \frac{1}{(1+\xi)^5} < 1$ folgt

$$0 \leq g(x) - T_4(g;0)(x) \leq \frac{1}{5} x^5.$$

□

Aufgabe 57:

(i) Die Menge der Nullstellen von f ist $N(f) = \{-3, 1\}$. Also ist $\frac{1}{f}$ auf $D = \mathbb{R} \setminus N(f)$ erklärt. Gesucht ist eine Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ mit positivem Konvergenzradius $r > 0$ und

$$\frac{1}{x^2 + 2x - 3} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x+1)^n \qquad \forall x \in D : |x+1| < r.$$

Multiplizieren mit dem Nenner der linken Seite liefert die äquivalente Aussage

$$\begin{aligned}
1 &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x+1)^n\right)\left(x^2+2x-3\right) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x+1)^n\right)\left((x+1)^2-4\right) \\
&= \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x+1)^{n+2}\right) - 4\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x+1)^n\right) \\
&\overset{\text{Index-Shift}}{=} \left(\sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2}(x+1)^n\right) - 4\left(a_0 + a_1(x+1) + \sum_{n=2}^{\infty} a_n(x+1)^n\right) \\
&= -4a_0 - 4a_1(x+1) + \sum_{n=2}^{\infty}(a_{n-2}-4a_n)(x+1)^n \qquad \forall x \in D : |x+1| < r.
\end{aligned}$$

Beide Seiten dieser Gleichung sind eine Potenzreihe mit positivem Konvergenzradius. Nach Satz 11.15 des Skriptes (Koeffizientenvergleich) gilt

$$-4a_0 = 1, \quad -4a_1 = 0, \quad \forall n \geq 2 : a_{n-2} - 4a_n = 0.$$

Damit ergibt sich induktiv

$$\begin{aligned}
a_0 &= -\frac{1}{4}, \qquad a_{2n} = \frac{1}{4}a_{2(n-1)} = \cdots = \left(\frac{1}{4}\right)^n a_0 = -\left(\frac{1}{4}\right)^n \frac{1}{4} = -\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}, \\
a_1 &= 0, \qquad a_{2n+1} = \frac{1}{4}a_{2(n-1)+1} = \cdots = \left(\frac{1}{4}\right)^n a_1 = 0.
\end{aligned}$$

Wir müssen noch sicherstellen, dass die gefundene Potenzreihe einen positiven Konvergenzradius hat. Nach der Formel von Cauchy-Hadamard gilt

$$r = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \sqrt[2n]{\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}}} = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \sqrt[2n]{\frac{1}{4}}\frac{1}{\sqrt{4}}} = 2 > 0.$$

Für alle $|x+1| < 2$ gilt also

$$\frac{1}{x^2+2x-3} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4^{n+1}}(x+1)^{2n}.$$

(ii) Die Funktion g ist beliebig oft differenzierbar. Wir berechnen die ersten drei Ableitungen. Für alle $x \in (-1, \infty)$ gilt

$$\begin{aligned}
g(x) &= e^{-x} + \frac{1}{1+x}, & g^{(2)}(x) &= e^{-x} + \frac{2}{(1+x)^3}, \\
g^{(1)}(x) &= -e^{-x} - \frac{1}{(1+x)^2}, & g^{(3)}(x) &= -e^{-x} - \frac{6}{(1+x)^4}.
\end{aligned}$$

Das Taylor-Polynom $T_2\left(g;\frac{1}{2}\right)$ ist laut Abschnitt 11.12 des Skriptes Vorlesung durch

$$\begin{aligned}
T_{\frac{1}{2}}^2 g(x) &= \sum_{k=0}^{2} \frac{g^{(k)}\left(\frac{1}{2}\right)}{k!}\left(x-\frac{1}{2}\right)^k \\
&= \left(e^{-\frac{1}{2}}+\frac{1}{1+\frac{1}{2}}\right)-\left(e^{-\frac{1}{2}}+\frac{1}{\left(1+\frac{1}{2}\right)^2}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right) \\
&\quad +\frac{1}{2}\left(e^{-\frac{1}{2}}+\frac{2}{\left(1+\frac{1}{2}\right)^3}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 \\
&= \left(\frac{1}{\sqrt{e}}+\frac{2}{3}\right)-\left(\frac{1}{\sqrt{e}}+\frac{4}{9}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{e}}+\frac{16}{27}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)^2
\end{aligned}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ gegeben.

Sei $x \in [0,1]$. Nach dem Satz von Taylor aus dem Abschnitt 11.12 des Skriptes gibt es ein ξ zwischen x und $\frac{1}{2}$ mit

$$g(x)-T_2\left(g;\frac{1}{2}\right)(x)=\frac{g^{(3)}(\xi)}{3!}\left(x-\frac{1}{2}\right)^3=-\left(\frac{1}{6\sqrt{e}}+\frac{1}{(1+\xi)^4}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)^3.$$

Aus $0<\xi$ folgt

$$\left|g^{(3)}(\xi)\right|=\left|-e^{-\xi}-\frac{6}{(1+\xi)^4}\right|=e^{-\xi}+\frac{6}{(1+\xi)^4}\overset{\text{Monotonie}}{\leq} e^{-0}+\frac{6}{(1+0)^4}=7.$$

Somit gilt mit $C:=\frac{7}{6}$ wie gefordert

$$\left|g(x)-T_2\left(g;\frac{1}{2}\right|\right)(x)\leq C\left|x-\frac{1}{2}\right|^3$$

für alle $x \in [0,1]$.

□

Aufgabe 58:

i) Die Abbildung f ist als Plynom stetig also nimmte f auf $[-3,2]$ sein Maximum und Minimum tatsächlich an. Wir bestimmen alle kritische stellen als $f'=0$ als

$$4x^3-8x=4x(x^2-2)=0 \tag{1}$$

und damit $x \in \{0,\pm\sqrt{2}\}$. Es ist klar, das $f'\geq 0$ on $[-\sqrt{2},0]$ and $f'\leq 0$ on $[0,\sqrt{2}]$. Daher hat f in $x=0$ ein lokales Maximum mit $f(0)=2$. Desweitern ist $f'<0$ for $x<-\sqrt{2}$ und $f'>0$ for $x>\sqrt{2}$ und damit hat f für $x\pm\sqrt{2}$ lokale minima mit $f(\pm\sqrt{2})=-2$. Wir untersuchen noch die Ränder des intervalls. Es ist $f(-3)=47$ und $f(2)=2$ und daher nimmt f für $x=-3$ sein globales Maximum an und die lokalen Minima sind auch globale Minima.

ii) Die Abbildung g ist stetig daher nimmt g auf $[-3,2]$ sein Maximum und Minimum tatsächlich an. Da die Abbildung g in $x=0$ nicht differenzierbar ist, müssen wir eine Fallunterscheidung treffen. Sei zuerst $x>0$ dann definieren wir $h: x\mapsto (x-1)e^x$ und $h'=0$ falls

$$e^x+(x-1)e^x=e^x x=0$$

Da $h' > 0$ für $x > 0$ ist klar, dass h wachsend ist und damit nimmt h sein Minimum für $x = 0$ mit $h(0) = -1$ an. Sei nun $x < 0$ dann definieren wir $y : x \mapsto -(x+1)e^x$ und $y' = 0$ falls

$$y'(x) = -e^x(x+2) = 0$$

und damit $x = -2$. Für $x > -2$ gilt $y' < 0$ für $x > -2$ und $y' > 0$ für $x < -2$ und damit hat y ein globales Maximum für $x = -2$.

Um zu entscheiden wo die Extremwerte der Funktion g liegen müssen wir noch $x \in -3, 0, 2$ überprüfen. Es ist $g(0) = -1 = h(0) = y(0)$ sowie $g(-3) = y(-3) = 2e^{-3} > 0$ und $g(2) = h(2) = e^2$. Klar ist, dass g sein Minimum bei $x = 0$ annimmt. Und da $g(2) > g(-2)$ nimmt g sein globales Maximum für $x = 2$ an.

Aufgabe 59:

i) Wir stellen zunächst fest, dass f stetig ist. Für $x \neq 0$ ist das klar als Quotient von sin und einem Polynom das auf $\mathbb{R} \setminus 0$ nicht verschwindet. Für $x = 0$ ist die Abbildung stetig, da

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin(x) - \sin(0)}{x - 0} = \sin'(x)|_{x=0} = \cos(0) = 1$$

Es ist $f(x) < 1$ für $x \neq 0$, da $|\sin(x)| \leq 1$ und damit nimmt f sein globales Maximum für $x = 0$ an. Desweiteren ist $f(-x) = f(x)$ und daher gnüget es $x > 0$ zu untersuchen. Um das Minimum zu bestimmen leiten wir die Abbildung ab es ist

$$\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)' = \frac{x\cos(x) - \sin(x)}{x^2} = 0 \text{ and } x > 0 \Leftrightarrow x\cos(x) = \sin(x) \text{ and } x > 0$$

Sei nun $x_0 \in \{x > 0 : x\cos(x) = \sin(x)\} = \{x > 0 : x = \tan(x)\}$ dann gilt

$$f(x_0) = \frac{\sin(x_0)}{x_0} = \frac{x_0\cos(x_0)}{x_0} = \cos(x_0)\,. \tag{2}$$

Untersuche das Intervall $I_n = [n\pi - \pi/2+, n\pi + \pi/2]$. Die Abbildung $\tan(\varphi) : \varphi \to \mathbb{R}$ ist auf I_n wachsend, differenzierbar und surjektiv. Desweitern ist $g : \varphi \mapsto \tan(\varphi) - \varphi$ differenzierbar mit $g'(\varphi) = \tan^2(\varphi) \geq 0$ was ebenfalls wachsend und surjektiv ist. Damit hat $\tan(x) = x$ auf jedem Intervall I_n eine eindeutige Lösung. Sei $x_n \in I_n$ diese eindeutige Lösung. Da $x > 0$ ist auch klar, dass $x_n \in [n\pi, n\pi + \pi/2]$, da nur dort $\tan(x) > 0$ gilt. Für $x_{n+1} \in I_{n+1}$ gilt offensichtlich $x_{n+1} > x_n$. Deswegen muss muss $x_{n+1} - [(n+1)\pi + \pi/2] < x_n - [n\pi + \pi/2]$ gelten. ($\tan(\cdot)$ ist auf I_n wachsend und surjektiv und damit $\tan(x) = x$ auch für $x_{n+1} > x_n$ stimmen kann muss x_{n+1} näher an der rechten Intervallgrenze liegen).

Es ist also $x_n \in [n\pi, n\pi + \pi/2]$ und damit ist

$$f(x_n) = \cos(x_n) < 0$$

für n ungerade. Desweiteren ist cos auf $[n\pi, n\pi + \pi/2]$ wachsend für n ungerade. Und da $x_{n+1} - [(n+1)\pi + \pi/2] < x_n - [n\pi + \pi/2]$ gilt also $\cos(x_1) < \cos(x_n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und damit nimmt f sein golobales Minumum bei $x_1 \in [\pi, 3\pi/2]$ an, wobei x_1 die eindeutige Lösung von $x = \tan(x)$ auf $[\pi, 3\pi/2]$ ist.

Da f symmetrisch ist gilt natürlich $f(-x_1) = f(x_1)$.

ii) Wir unterscheiden die Fälle $x > 0$ und $x < 0$. Sei zuerst $x > 0$, dann ist $g(x) = e^x - e^{-x}$ und $g'(x) = e^x + e^{-x} > 0$ und damit ist g wachsend. Für $x < 0$ gilt $g(x) = e^{-x} - e^x$ und $g'(x) = -e^{-x} - e^x$ ist fallend. Daher nimmt g sein Minimum für $x = 0$ an mit $g(0) = 0$. Desweitern gilt $g(x) \to \infty$ für $x \to \pm\infty$ und damit nimmt g auf $\mathbb{R}$ sein Maximum nicht an.

Aufgabe 60:

i) Dies ist Jensens Ungleichung. Zuerst definieren wir $p_i = a_i / \sum_{i=1}^n a_i$, dann gilt $p_i \in [0,1]$ und $\sum p_i = 1$ und es ist äquivalent zu zeigen

$$\varphi\left(\sum_{i=1}^n p_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n p_i \varphi(x_i) \tag{3}$$

Sei nun $n = 2$ dann ist $p_2 = 1 - p_1$ und damit

$$\varphi\left(p_1 x_1 + (1-p_1)x_2\right) \leq p_1\varphi(x_1) + (1-p_1)\varphi(x_2)$$

was direkt nach der Definition von konvexität der Funktion φ gilt. Wir führen nun eine Induktion. Es gelte also (3) für ein festes aber beliebiges $n \in \mathbb{N}$, $n > 2$. Wähle nun $p_{n+1} \in [0,1]$, dann gilt $\sum_{i=1}^{n+1} p_i = 1 + p_{n+1}$. Wir definieren $q_i = p_i/(1 + p_{n+1})$, dann gilt $\sum_{i=1}^{n+1} q_i = 1$. Es gilt

$$\sum_{i=1}^{n+1} q_i x_i = (1 + p_{n+1})^{-1} \sum_{i=1}^n p_i x_i + q_{n+1}x_{n+1}\,. \tag{4}$$

Wir definieren $\tilde{x} = \sum_{i=1}^n p_i x_i$. Damit ist

$$\sum_{i=1}^{n+1} p_i x_i = (1 + p_{n+1})^{-1}\tilde{x} + q_{n+1}x_{n+1}\,. \tag{5}$$

und $(1+p_{n+1})^{-1} + q_{n+1} = 1$ (direkt nach Definition von q_{n+1}). Also gilt nach der Konvexität und dem Fall $n = 2$ und der Induktionsvoraussetzung

$$\begin{aligned}
\varphi((1 + p_{n+1})^{-1}\tilde{x} + q_{n+1}x_{n+1}) &\leq (1 + p_{n+1})^{-1}\varphi(\tilde{x}) + q_{n+1}\varphi(x_{n+1}) \\
&= (1 + p_{n+1})^{-1}\varphi\left(\sum_{i=1}^n p_i x_i\right) + q_{n+1}\varphi(x_{n+1}) \\
&\leq (1 + p_{n+1})^{-1}\sum_{i=1}^n p_i\varphi(x_1) + q_{n+1}\varphi(x_{n+1}) \\
&= \sum_{i=1}^{n+1} q_i\varphi(x_i)\,.
\end{aligned}$$

Es gilt also die Vermutung.

ii) Es ist $\log(x)'' = -1/x^2 < 0$ und daher ist log konkav.

iii) Mit demselben Beweis wie in *i)* gilt Jensens Ungleichung in die umgekehrte Richtung für konkave Funktionen. Wähle nun $p_i = 1/n$, dann gilt mit $\varphi = \log$

$$\log(1/n\sum x_i) \geq 1/n \sum_{i=1}^n \log(x_i) = \log\left((\Pi_{i=1}^n x_i)^{1/n}\right)\,. \tag{6}$$

Da die exponentialfunktion wachsend ist gilt erhält diese die Ungleichung und es folgt die AGM-Ungleichung sofort.

Aufgabe 61:

i) Wir benutzen die Konvexität der Exponentialfunktion, d.h., dass für alle $x, y \in \mathbb{R}$ und $\lambda \in [0,1]$ gilt:
$$\exp\big((1-\lambda)x + \lambda y\big) \leq (1-\lambda)\exp(x) + \lambda \exp(y) \quad (*).$$
Seien ohne Einschränkung $A, B > 0$. Wähle $x := \ln A$, $y := \ln B$ und $\lambda := \frac{1}{q}$. Wegen $q > 1$ ist $\lambda \in [0,1]$. Außerdem gilt:
$$1 - \lambda = \frac{1}{p}.$$
Wir erhalten:
$$\begin{aligned} A^{1/p}B^{1/q} &= \exp\big(\ln(A^{1/p})\big)\exp\big(\ln(B^{1/q})\big) \\ &= \exp\Big(\frac{1}{p}\ln A + \frac{1}{q}\ln B\Big) \overset{(*)}{\leq} \frac{1}{p}\exp(\ln A) + \frac{1}{q}\exp(\ln B) = \frac{A^p}{p} + \frac{B^q}{q}. \end{aligned}$$

ii) Sind $x = (x_1, \ldots, x_n), y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ und $p, q > 1$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, so gilt:
$$\sum_{j=1}^{n} |x_j y_j| \leq \|x\|_p \|y\|_q.$$
Wir beweisen dies nun:
Seien ohne Einschränkung $\|x\|_p, \|y\|_q > 0$. Sei $j \in \{1, \ldots, n\}$ fest. Wähle $A := \frac{|x_j|^p}{\|x\|_p^p} > 0$, $B := \frac{|y_j|^q}{\|y\|_q^q} > 0$. Wegen $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ gilt nach der Young-Ungleichung:
$$\frac{|x_j y_j|}{\|x\|_p \|y\|_q} = \frac{|x_j|}{\|x\|_p} \cdot \frac{|y_j|}{\|y\|_q} = A^{1/p}B^{1/q} \leq \frac{A^p}{p} + \frac{B^q}{q} = \frac{|x_j|^p}{p\|x\|_p^p} + \frac{|y_j|^q}{q\|y\|_q^q}.$$
Aufsummieren über $j = 1, \ldots, n$ ergibt:
$$\frac{1}{\|x\|_p \|y\|_q} \sum_{j=1}^{n} |x_j y_j| \leq \frac{1}{p\|x\|_p^p} \sum_{j=1}^{n} |x_j|^p + \frac{1}{q\|y\|_q^q} \sum_{j=1}^{n} |y_j|^q = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$
Daraus folgt:
$$\sum_{j=1}^{n} |x_j y_j| \leq \|x\|_p \|y\|_q.$$
Hinweis: Im Fall $p = q = 2$ ist dies die Cauchy-Schwarz Ungleichung