Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Analysis
apl. Prof. Dr. Peer Christian Kunstmann
Marvin Schulz, M.Sc.

WS2024/25
19.01.2025

Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Physik

11. Übungsblatt

Aufgabe 56: [Integrale nach Riemann **T**]
Berechnen Sie mit Hilfe von geeigneten Riemannschen Zwischensummen die Grenzwerte

(i) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{p+1}} \sum_{k=1}^{n} k^p$, wobei $p \in \mathbb{N}$ fest ist, und

(ii) $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{k}$.

Aufgabe 57:
Berechnen Sie mit Hilfe von geeigneten Riemannschen Zwischensummen die Grenzwerte

(i) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{k\pi}{2n}\right)$ und

(ii) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \prod_{k=1}^{n} (k+n)^{\frac{1}{n}}$.

Aufgabe 58: [Integrale **T**]
Berechnen Sie die Integrale

(i) $\int_{-2}^{2} |t-1| \, \mathrm{d}t$,

(ii) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} t^2 \sin(2t) \mathrm{d}t$ und

(iii) Sei $\alpha \in \mathbb{R}$, $\int_1^{\infty} t^{\alpha} \ln(t) \mathrm{d}t$,

(iv) Sei $\alpha \in \mathbb{R}$, $\int_0^{\infty} e^{-\alpha t^2} t \mathrm{d}t$,

Aufgabe 59:
Berechnen Sie die Integrale

(i) $\int_{(k-1)\pi}^{k\pi} |\sin(t)| \, \mathrm{d}t$ für festes $k \in \mathbb{Z}$,

(ii) $\int_1^{e} \frac{1}{t(1+\ln(t))} \mathrm{d}t$,

(iii) $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \arcsin(t) \mathrm{d}t$ und

(iv) $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{2\pi}{3}} \frac{1}{\sin(t)} \mathrm{d}t$.

Hinweis: Beachten Sie es ist $\sin(2x) = \frac{2\tan(x)}{1+\tan^2(x)}$ für geeignete $x \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 60:
Sei $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ eine nichtnegative, beschränkte Funktion so, dass

$$\int_0^1 f(x)\, dx = 0$$

gilt. Entscheiden Sie, ob f auf dem Intervall $[0,1]$ verschwindet, oder beweisen Sie das Gegenteil. Was gilt, wenn wir zusätzlich annehmen dass f stetig ist?

Aufgabe 61: [Symmetrie und Integral **T**]
Sei $a > 0$ und $f : [-a, a]$ stückweise stetig. Zeigen Sie:

(a) Ist f *gerade* (d.h. für alle $x \in [-a, a]$ gilt $f(-x) = f(x)$), so ist $\int_{-a}^{a} f(t) = 2\int_{0}^{a} f(t)$.

(b) Ist f *ungerade* (d.h. für alle $x \in [-a, a]$ gilt $f(-x) = -f(x)$), so ist $\int_{-a}^{a} f(t) = 0$.