

## Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Physik

### Lösungsvorschläge zum 11. Übungsblatt

#### Aufgabe 62:

(i) Es gilt für jedes  $n \in \mathbb{N}$

$$\frac{1}{n^{p+1}} \sum_{k=1}^n k^p = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{n}\right)^p = \sum_{k=1}^n f(\xi_k) |I_k| = \sigma_f(Z_n, \xi^{(n)}),$$

wobei  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto x^p$ ,

$$Z_n = \left\{ x_0 = 0, x_1 = \frac{1}{n}, x_2 = \frac{2}{n}, \dots, x_n = \frac{n}{n} = 1 \right\}, \quad \xi^{(n)} = (\xi_1, \dots, \xi_n) = (x_1, \dots, x_n).$$

Die Feinheit der äquidistanten Zerlegung  $Z_n$  des Intervalls  $[0, 1]$  ist  $\|Z_n\| = \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ . Da  $f \in R([a, b])$  nach Satz 12.5 des Skriptes, gilt  $\sigma_f(Z_n, \xi^{(n)}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f(x) dx$  nach Satz 12.7 des Skriptes. Eine Stammfunktion von  $f$  ist durch  $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto \frac{x^{p+1}}{p+1}$  gegeben. Nach dem Hauptsatz (1) aus Abschnitt 12.10 des Skriptes gilt

$$\int_0^1 f(x) dx = [F(x)]_{x=0}^1 = \frac{1}{p+1}.$$

(ii) Es gilt für jedes  $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{k} = \frac{1}{n} \sum_{k=n}^{2n-1} \frac{n}{k} \stackrel{\text{Index-}}{\text{shift}} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{n}{k+n-1} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{1 + \frac{k-1}{n}} = \sum_{k=1}^n f(\xi_k) |I_k| = \sigma_f(Z_n, \xi^{(n)}),$$

wobei  $f: (-1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto \frac{1}{1+x}$ ,

$$Z_n = \left\{ x_0 = 0, x_1 = \frac{1}{n}, \dots, x_{n-1} = \frac{n-1}{n}, x_n = \frac{n}{n} = 1 \right\}, \quad \xi^{(n)} = (x_0, \dots, x_{n-1}).$$

Die Feinheit der äquidistanten Zerlegung  $Z_n$  des Intervalls  $[0, 1]$  ist  $\|Z_n\| = \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ . Da  $f \in R([a, b])$  nach Satz 12.5 des Skriptes, gilt  $\sigma_f(Z_n, \xi^{(n)}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f(x) dx$  nach Satz 12.7 des Skriptes. Eine Stammfunktion von  $f$  ist durch  $F: (-1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto \ln(1+x)$  gegeben. Nach dem Hauptsatz (1) aus Abschnitt 12.10 des Skriptes gilt

$$\int_0^1 f(x) dx = [F(x)]_{x=0}^1 = \ln(2).$$

□

#### Aufgabe 63:

(i) Es gilt für jedes  $n \in \mathbb{N}$

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \cos\left(\frac{k\pi}{2n}\right) = \sum_{k=1}^n f(\xi_k) |I_k| = \sigma_f(Z_n, \xi^{(n)}),$$

wobei  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)$ ,

$$Z_n = \left\{ x_0 = 0, x_1 = \frac{1}{n}, x_2 = \frac{2}{n}, \dots, x_n = \frac{n}{n} = 1 \right\}, \quad \xi^{(n)} = (\xi_1, \dots, \xi_n) = (x_1, \dots, x_n).$$

Die Feinheit der äquidistanten Zerlegung  $Z_n$  des Intervalls  $[0, 1]$  ist  $\|Z_n\| = \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ . Da  $f \in R([a, b])$  nach Satz 12.5 des Skriptes, gilt  $\sigma_f(Z_n, \xi^{(n)}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f(x) dx$  nach Satz 12.7 des Skriptes. Eine Stammfunktion von  $f$  ist durch  $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto \frac{2}{\pi} \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)$  gegeben. Nach dem Hauptsatz (1) aus Abschnitt 12.10 des Skriptes gilt

$$\int_0^1 f(x) dx = [F(x)]_{x=0}^1 = \frac{2}{\pi}.$$

(ii) Es gilt für jedes  $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \prod_{k=1}^n (k+n)^{\frac{1}{n}} &= \prod_{k=1}^n \left(\frac{k+n}{n}\right)^{\frac{1}{n}} = \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{k}{n}\right)^{\frac{1}{n}} = \exp\left(\ln\left(\prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{k}{n}\right)^{\frac{1}{n}}\right)\right) \\ &= \exp\left(\sum_{k=1}^n \ln\left(\left(1 + \frac{k}{n}\right)^{\frac{1}{n}}\right)\right) = \exp\left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{n} \ln\left(1 + \frac{k}{n}\right)\right) \\ &= \exp\left(\sum_{k=1}^n f(\xi_k) |I_k|\right) = \exp\left(\sigma_f(Z_n, \xi^{(n)})\right), \end{aligned}$$

wobei  $f: (-1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto \ln(1+x)$ ,

$$Z_n = \left\{ x_0 = 0, x_1 = \frac{1}{n}, \dots, x_{n-1} = \frac{n-1}{n}, x_n = \frac{n}{n} = 1 \right\}, \quad \xi^{(n)} = (x_1, \dots, x_n).$$

Die Feinheit der äquidistanten Zerlegung  $Z_n$  des Intervalls  $[0, 1]$  ist  $\|Z_n\| = \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ . Da  $f \in R([a, b])$  nach Satz 12.5 des Skriptes, gilt  $\sigma_f(Z_n, \xi^{(n)}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f(x) dx$  nach Satz 12.7 des Skriptes. Da die Exponentialfunktion stetig ist, gilt  $\exp\left(\sigma_f(Z_n, \xi^{(n)})\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \exp\left(\int_0^1 f(x) dx\right)$ . Eine Stammfunktion von  $f$  ist durch

$$F: (-1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto (x+1) \ln(x+1) - x$$

gegeben (vgl. Beispiel (2) im Abschnitt 12.12 des Skriptes). Nach dem Hauptsatz (1) aus Abschnitt 12.10 des Skriptes gilt

$$\exp\left(\int_0^1 f(x) dx\right) = \exp\left([F(x)]_{x=0}^1\right) = \exp(2 \ln(2) - 1) = \frac{(e^{\ln(2)})^2}{e} = \frac{4}{e}.$$

□

### Aufgabe 64:

Wir halten zunächst fest, dass jeder Integrand auf dem jeweiligen Integrationsintervall stetig ist und deshalb auch integrierbar nach Satz aus Abschnitt 12.5 des Skriptes.

(i) Es gilt

$$\begin{aligned}\int_{-2}^2 |t-1| dt &= \int_{-2}^1 |t-1| dt + \int_1^2 |t-1| dt = \int_{-2}^1 (1-t) dt + \int_1^2 (t-1) dt \\ &= \left[ t - \frac{t^2}{2} \right]_{t=-2}^{t=1} + \left[ \frac{t^2}{2} - t \right]_{t=1}^{t=2} = 5.\end{aligned}$$

(ii) Es gilt nach der Regel der partiellen Integration aus Abschnitt 12.12 des Skriptes

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{\frac{1}{2}t^2}_{=g(t)} \underbrace{\sin(2t)}_{=f'(t)} dt &\stackrel{\text{P.I.}}{=} - \left[ \frac{1}{2} \cos(2t) \cdot \frac{1}{2}t^2 \right]_{t=0}^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} t \cos(2t) dt \\ &= \frac{\pi^2}{16} + \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} t \cos(2t) dt.\end{aligned}$$

Das verbliebene Integral wird wieder partiell integriert zu

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{t}_{=g(t)} \underbrace{\cos(2t)}_{=f'(t)} dt \stackrel{\text{P.I.}}{=} \left[ t \cdot \frac{1}{2} \sin(2t) \right]_{t=0}^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2t) dt = \frac{1}{4} [\cos(2t)]_{t=0}^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{1}{2}.$$

Insgesamt also

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} t^2 \sin(2t) dt = \frac{\pi^2}{16} - \frac{1}{4}.$$

(iii) Zunächst ist klar, dass für  $\alpha < -1$  das Integral divergiert. Sei nun  $\alpha < -1$ , dann gilt mittels partieller Integration

$$\begin{aligned}\int_1^{\infty} t^{\alpha} \ln(t) dt &= \frac{1}{\alpha+1} [t^{\alpha+1} \ln(t)]_1^{\infty} - \frac{1}{\alpha+1} \int_1^{\infty} t^{\alpha} dt \\ &= -\frac{1}{\alpha+1} \int_1^{\infty} t^{\alpha} dt = \frac{-1}{\alpha(\alpha+1)} [t^{\alpha+1}]_1^{\infty} = \frac{1}{\alpha(\alpha+1)}\end{aligned}$$

(iv) Für  $\alpha \leq 0$  ist klar, dass das Integral divergiert, da  $e^{-\alpha t^2} \geq 0$  nicht gegen 0 konvergiert für  $t \rightarrow \infty$ . Sei also nun  $\alpha > 0$ . Beachte es ist  $(t^2)' = 2t$  und damit gilt nach der Kettenregel

$$\left( \frac{1}{2\alpha} e^{\alpha t^2} \right)' = e^{\alpha t^2} t. \quad (1)$$

Damit ist

$$\int_0^{\infty} e^{-\alpha t^2} dt = \left[ -\frac{e^{-\alpha t^2}}{2\alpha} \right]_0^{\infty} = \frac{1}{2\alpha} \quad (2)$$

□

### Aufgabe 65:

Wir halten zunächst fest, dass jeder Integrand auf dem jeweiligen Integrationsintervall stetig ist und deshalb auch integrierbar nach Satz aus Abschnitt 12.5 des Skriptes.

- (i) Die Nullstellenmenge des Sinuses ist  $\pi\mathbb{Z}$  (siehe Abschnitt 10.2 des Skriptes). Also hat der Sinus für jedes  $k \in \mathbb{Z}$  auf  $[(k-1)\pi, k\pi]$  keinen Vorzeichenwechsel (Zwischenwertsatz aus Abschnitt 9.9 des Skriptes). Folglich gilt

$$\begin{aligned} \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} |\sin(t)| dt &= \left| \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \sin(t) dt \right| = \left| -[\cos(t)]_{t=(k-1)\pi}^{t=k\pi} \right| \\ &= \left| (-1)^k - (-1)^{(k-1)} \right| = \left| (-1)^k + (-1)^k \right| = 2. \end{aligned}$$

- (ii) Es gilt nach der Substitutionsregel aus dem Abschnitt 12.13 des Skriptes

$$\begin{aligned} \int_1^e \frac{1}{t(1+\ln(t))} dt &= \int_1^e \underbrace{\frac{1}{t}}_{=g'(t)} \underbrace{\frac{1}{1+\ln(t)}}_{=f(g(t))} dt = \int_{g(1)}^{g(e)} f(x) dx \\ &= \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx = [\ln(1+x)]_{x=0}^1 = \ln(2). \end{aligned}$$

- (iii) Es gilt nach der Regel der partiellen Integration aus Abschnitt 12.12 des Skriptes

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \arcsin(t) dt &= \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \underbrace{1}_{=f'(t)} \underbrace{\arcsin(t)}_{=g(t)} dt = [t \arcsin(t)]_{t=0}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} - \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} t \cdot \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\pi}{4} - \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{t}{\sqrt{1-t^2}} dt. \end{aligned}$$

Weiter gilt nach der Substitutionsregel aus Abschnitt 12.13 des Skriptes

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{t}{\sqrt{1-t^2}} dt &= \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \underbrace{2t}_{=g'(t)} \underbrace{\frac{1}{2\sqrt{1-t^2}}}_{=f(g(t))} dt = \int_{g(0)}^{g(\frac{\sqrt{2}}{2})} f(x) dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{2\sqrt{1-x}} dx \\ &= -[\sqrt{1-x}]_{x=0}^{\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

Insgesamt also

$$\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \arcsin(t) dt = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\pi}{4} + [\sqrt{1-t^2}]_{t=0}^{t=\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2}\pi}{8} + \frac{\sqrt{2}}{2} - 1.$$

- (iv) Nach Aufgabe 40 (i) gilt

$$\sin(t) = \frac{2 \tan\left(\frac{t}{2}\right)}{1 + \tan^2\left(\frac{t}{2}\right)}$$

für alle  $t \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}\right] \subseteq \mathbb{R} \setminus \pi(2\mathbb{Z} + 1)$ . Folglich ist

$$\frac{1}{\sin(t)} = \frac{1 + \tan^2\left(\frac{t}{2}\right)}{2 \tan\left(\frac{t}{2}\right)} \quad \forall t \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}\right].$$

Es gilt nach der Substitutionsregel aus dem Abschnitt 12.13 des Skriptes (für Werte des Tangens siehe Aufgabe 50)

$$\begin{aligned} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{2\pi}{3}} \frac{1}{\sin(t)} dt &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{2\pi}{3}} \frac{1 + \tan^2\left(\frac{t}{2}\right)}{2 \tan\left(\frac{t}{2}\right)} dt \stackrel{t=2 \arctan(s)}{\underset{\frac{dt}{ds} = \frac{2}{1+s^2}}{=}} \int_1^{\sqrt{3}} \frac{1+s^2}{2s} \cdot \frac{2}{1+s^2} ds \\ &= \int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{s} ds = [\ln(s)]_{s=1}^{s=\sqrt{3}} = \frac{\ln(3)}{2}. \end{aligned}$$

□ **Aufgabe 66:** Die Funktion muss im allgemeinen nicht verschwinden, denn  $f(x) = 0$  für  $x \neq 1/2$  und  $f(1/2) = 1$  ist Riemann Integrierbar aber gleichzeitig gilt  $\int_0^1 f(x) dx = 0$  (wähle geeignete Zerlegungen und Zwischenvektoren). Sei nun  $f$  stetig. Angenommen es existiert  $x_0 \in [0, 1]$  so, dass  $f(x_0) > 0$ , dann gilt mit  $\varepsilon = f(x_0)/2 > 0$ , dass ein  $\delta > 0$  existiert mit  $f(x) > f(x_0)/2$  für alle  $x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \cap [0, 1]$ . Klar ist, dass  $|[x_0 - \delta, x_0 + \delta] \cap [0, 1]| > \delta$  Es gilt die Abschätzung

$$\int_0^1 f(x) dx \geq \int_{\max\{x_0-\delta, 0\}}^{\min\{x_0+\delta, 1\}} f(x) dx \geq f(x_0)/2 \int_{\max\{x_0-\delta, 0\}}^{\min\{x_0+\delta, 1\}} 1 dx \geq \delta f(x_0)/2 > 0$$

Daher muss die Funktion verschwinden falls das Integral verschwindet.

### Aufgabe 67:

Wir halten zunächst fest, dass in beiden Aufgabenteilen,  $f$  stückweise stetig auf  $[-a, a]$  ist, und daher alle vorkommenden Integrale erklärt sind.

(a) Nach Abschnitt 11.3 der Vorlesung (Linearität des Integrals in den Integrationsgrenzen) gilt:

$$\int_{-a}^a f(t) dt = \int_{-a}^0 f(t) dt + \int_0^a f(t) dt$$

Wir substituieren im ersten Integral nun  $s = -t$ , d.h.  $t = -s$ . Es folgt  $dt = -ds$  und  $-a = t(a)$  sowie  $0 = t(0)$ . Damit folgt:

$$\begin{aligned} \int_{-a}^a f(t) dt &= \int_{-a}^0 f(t) dt + \int_0^a f(t) dt = \int_a^0 -f(-s) ds + \int_0^a f(t) dt \\ &\stackrel{f \text{ gerade}}{=} \int_0^a f(s) ds + \int_0^a f(t) dt = 2 \int_0^a f(t) dt \end{aligned}$$

(b) Nach Abschnitt 11.3 der Vorlesung (Linearität des Integrals in den Integrationsgrenzen) gilt:

$$\int_{-a}^a f(t) dt = \int_{-a}^0 f(t) dt + \int_0^a f(t) dt$$

Wir substituieren im ersten Integral nun  $s = -t$ , d.h.  $t = -s$ . Es folgt  $dt = -ds$  und  $-a = t(a)$  sowie  $0 = t(0)$ . Damit folgt:

$$\begin{aligned} \int_{-a}^a f(t) dt &= \int_{-a}^0 f(t) dt + \int_0^a f(t) dt = \int_a^0 -f(-s) ds + \int_0^a f(t) dt \\ &\stackrel{f \text{ ungerade}}{=} \int_0^a -f(s) ds + \int_0^a f(t) dt = \int_0^a f(t) - f(t) dt = 0 \end{aligned}$$

□