Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Analysis
apl. Prof. Dr. Peer Christian Kunstmann
Marvin Schulz, M.Sc.

WS2020/21
24.01.2025

Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Physik

12. Übungsblatt

Aufgabe 62:
Berechnen Sie die Integrale

(i) $\int_{-1/2}^{1/2} \frac{1}{x^2-1}\,\mathrm{d}t$,

(ii) $\int_1^e t\ln(t)\mathrm{d}t$,

(iii) $\int_1^2 \frac{t^3}{(1+t^2)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}t$ und

(iv) $\int_{\frac{\ln(3)}{2}}^{\frac{\ln(7)}{2}} \frac{1}{\sinh(t)\cosh(t)}\mathrm{d}t$.

Aufgabe 63: [Integrale II **T**]
Berechnen Sie die Integrale

(i) $\int_0^1 \frac{t}{\sqrt{9-4t^2}}\mathrm{d}t$,

(ii) $\int_{-1/2}^{1/2} \frac{x+1}{x^3-2x^2+x-2}\,\mathrm{d}t$,,

(iii) $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{t}{\sqrt{1-t}}\mathrm{d}t$ und

(iv) $\int_{-\frac{\ln(3)}{2}}^{\frac{\ln(3)}{2}} \frac{e^t+3}{e^{2t}+1}\mathrm{d}t$.

Aufgabe 64:
Bestimmen Sie sämtliche Lösungen des Anfangswertproblems

$$y'(x) = x\sqrt{1-y(x)^2}, \qquad y(0) = y_0 \in [-1,1].$$

Für welche y_0 ist das Anfangswertproblem eindeutig lösbar?

Aufgabe 65: [Grenzwerte und Integrale **T**]
Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei

(i) $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{2nx^2}{(1+n^3x^2)^2}$, bzw.

(ii) $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{1+nx}$.

Berechnen Sie $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x$.

Aufgabe 66:
Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $a, b \in C(I)$. Für alle $x_0 \in I, y_0 \in \mathbb{R}$ ist das Anfangswertproblem

$$y'(x) = a(x)y(x) + b(x), \quad y(x_0) = y_0,$$

eindeutig lösbar. Die maximale Lösung $\phi : I \to \mathbb{R}$ ist gegeben durch

$$\phi(x) = y_0 e^{A(x)} + e^{A(x)} \int_{x_0}^{x} e^{-A(s)} b(s)\, ds, \quad x \in I,$$

wobei $A(x) := \int_{x_0}^{x} a(t)\, dt, \quad x \in I.$

Zeigen Sie, dass für ein $\alpha < 0$ die Lösung $\phi : I \to \mathbb{R}$ auf $[x_0 - \alpha, x_0]$ eindeutig ist.
Hinweis: Gehen Sie ähnlich zum Beweis von 13.3 im Skript vor.

Aufgabe 67: [Anfangswertprobleme **T**]
Bestimmen Sie die maximale Lösung der folgenden Anfangswertprobleme.

(i) $y' = \frac{-e^y}{1+x^2}, \qquad y(0) = -\ln\left(\frac{\pi}{4}\right).$

(ii) $y' = 2xy + x \qquad , y(0) = \frac{1}{2}.$

Hinweis: Es ist $\arctan(x)' = \frac{1}{1+x^2}$ und $-\frac{\pi}{2} < \arctan(x) < \frac{\pi}{2}$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 68:
Bestimmen Sie die maximale Lösung der folgenden Anfangswertprobleme.

(i) $y' = xe^{-x}y^2, \qquad y(0) = 1.$

(ii) $y' = \left(x + \frac{2}{1+x^2}\right) y, \qquad y(0) = 1.$