Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Analysis
apl. Prof. Dr. Peer Kunstmann
Marvin Schulz

WS2024/25
26.01.2024

Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Physik

Lösungsvorschläge zum 12. Übungsblatt

Aufgabe 62:

(i) Man löst dieses Integral durch Partialbruchzerlegung.

(ii) Substituiere zum Beispiel $1 + t^2 = u$.

(iii) Benutze partielle Integration.

(iv) Substituirere $\sinh(t) = u$ und löse das Integral dann mittels einer Partialbruchzerlegung.

Aufgabe 63:

Wir halten zunächst fest, dass jeder Integrand auf dem jeweiligen Integrationsintervall stetig ist und deshalb auch integrierbar nach Satz aus Abschnitt 12.5 des Skriptes.

(i) Die Technik des „Scharfen Hinsehens“ zusammen mit der Substitutionsregel liefert

$$\int_0^1 \frac{t}{\sqrt{9-4t^2}}dt = -\frac{1}{8}\int_0^1 \frac{(-8t)}{\sqrt{9-4t^2}}dt = -\left[\frac{\sqrt{9-4t^2}}{4}\right]_{t=0}^1 = \frac{3}{4} - \frac{\sqrt{5}}{4} = \frac{3-\sqrt{5}}{4}.$$

(ii) Man löst dieses Integral durch Partialbruchzerlegung.

(iii) Es gilt

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{t}{\sqrt{1-t}}dt &= \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{(t-1)+1}{\sqrt{1-t}}dt = -\int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{1-t}dt + \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-t}}dt \\ &= \frac{2}{3}\left[(1-t)^{\frac{3}{2}}\right]_{t=0}^{\frac{1}{2}} - 2\left[\sqrt{1-t}\right]_{t=0}^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3\sqrt{2}} - \frac{2}{3} + 2 - \sqrt{2} = \frac{8-5\sqrt{2}}{6}.\end{aligned}$$

(iv) Substitutionsregel liefert

$$\int_{-\frac{\log(3)}{2}}^{\frac{\log(3)}{2}} \frac{e^t+3}{e^{2t}+1}dt \underset{\frac{dt}{ds}=\frac{1}{s}}{\overset{t=\ln(s)}{=}} \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} \frac{s+3}{s^2+1}\cdot\frac{1}{s}\mathrm{d}s = \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} \frac{1}{1+s^2}\mathrm{d}s + 3\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} \frac{1}{s(s^2+1)}\mathrm{d}s.$$

Das erste Integral ist

$$\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} \frac{1}{1+s^2}\mathrm{d}s = [\arctan(s)]_{s=\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6}.$$

Für das zweite Integral beobachtet man (Partialbruchzerlegung)

$$\frac{1}{s(s^2+1)} = \frac{1}{s} - \frac{s}{s^2+1} \qquad \forall s \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$$

und folglich

$$\begin{aligned}
\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} \frac{1}{s(s^2+1)} ds &= \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} \frac{1}{s} ds - \frac{1}{2} \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} \frac{2s}{1+s^2} ds = [\ln(s)]_{s=\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} - \frac{1}{2} \left[\ln(1+s^2)\right]_{s=\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} \\
&= \ln(3) - \frac{1}{2} \left(2\ln(2) - 2\ln(2) + \ln(3)\right) = \frac{\ln(3)}{2}.
\end{aligned}$$

Insgesamt folgt $\int_{-\frac{\log(3)}{2}}^{\frac{\log(3)}{2}} \frac{e^t+3}{e^{2t}+1} dt = \frac{\pi}{6} + \frac{3}{2}\ln(3)$.

□

Aufgabe 64:

Bei der DGL handelt es sich um eine Differentialgleichung mit getrennten Veränderlichen (siehe Abschnitt 13.4 des Skriptes). Betrachte zunächst den Fall $|u_0| < 1$ und löse formal

$$\begin{aligned}
u' &= t\sqrt{1-u^2} \\
\Rightarrow \int_0^t \frac{u'(s)}{\sqrt{1-u^2(s)}} ds = \int_{u_0}^{u(t)} \frac{1}{\sqrt{1-\eta^2}} d\eta &= \int_0^t s ds \\
\Rightarrow [\arcsin(\eta)]_{\eta=u_0}^{u(t)} &= \frac{t^2}{2} \\
\Rightarrow u(t) &= \sin\left(\frac{t^2}{2} + \arcsin(u_0)\right).
\end{aligned}$$

Diese Lösungsformel kann nicht für alle $t \in \mathbb{R}$ gültig sein, denn wegen der DGL muss u monoton wachsend für $t \geq 0$ und monoton fallend für $t \leq 0$ sein. Tatsächlich gilt sie auf dem größten Intervall I, welches die Startstelle 0 enthält und auf dem $\sqrt{1-u^2}$ nicht verschwindet (vgl. Abschnitt 13.4 des Skriptes), also

$$I = (-a, a), \quad \text{wobei} \quad a = \sqrt{\pi - 2\arcsin(u_0)}.$$

Wegen der erwähnten Monotonie, ist

$$u(t) = \begin{cases} \sin\left(\frac{t^2}{2} + \arcsin(u_0)\right), & \text{falls } |t| < a, \\ 1 & \text{sonst} \end{cases} \qquad \forall t \in \mathbb{R}$$

der einzige Kandidat für eine maximale Lösung des AWPs. Tatsächlich ist die Fortsetzung in a stetig und wegen

$$\lim_{t\to a-} u'(t) = \lim_{t\to a-} 2t\cos\left(\frac{t^2}{2} + \arcsin(u_0)\right) = 2a \underbrace{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}_{=0} = 0 = \lim_{t\to a+} u'(t)$$

differenzierbar. Wegen Symmetrie gilt das auch für $-a$. Schließlich ist die DGL auf ganz $\mathbb{R}$ erfüllt.

Falls $u_0 = 1$, ist $u : \mathbb{R} \to [-1, 1]$, $t \mapsto 1$ die eindeutige, maximale Lösung des AWPs: Natürlich ist u eine maximale Lösung. Angenommen, es gäbe eine weitere Lösung $\tilde{u} : I \to [-1, 1]$. Wegen der bereits erwähnten Monotonie, nimmt $\tilde{u}$ in $t = 0$ sein globales Minimum $u_0 = 1$ an. Also gilt tatsächlich $\tilde{u} = u|_I \equiv 1$.

Falls $u_0 = -1$, ist $u \equiv -1$ eine maximale Lösung. Falls eine Lösung von dieser Konstanten (nach oben) abweicht, kann man ihre Gestalt wieder mit der Trennung der Veränderlichen berechnen (vgl. den Fall $|u_0| < 1$). Also hat jede Lösung die Gestalt

$$u(t) = \begin{cases} 1 & \text{für } t \leq -\sqrt{2\pi + t_1^2}, \\ \sin\left(\frac{t^2}{2} - \frac{t_1^2}{2} - \frac{\pi}{2}\right) & \text{für } -\sqrt{2\pi + t_1^2} < t \leq -t_1, \\ -1 & \text{für } -t_1 < t \leq t_2, \\ \sin\left(\frac{t^2}{2} - \frac{t_2^2}{2} - \frac{\pi}{2}\right) & \text{für } t_2 < t \leq \sqrt{2\pi + t_2^2}, \\ 1 & \text{für } \sqrt{2\pi + t_2^2} \leq t \end{cases} \qquad \forall t \in \mathbb{R}$$

mit beliebigen Konstanten $t_1, t_2 \in [0, \infty]$. □

Aufgabe 65:

(i) Wir beobachten, dass für jedes $x \in [0,1]$ und jedes $n \in \mathbb{N}$

$$|f_n(x)| = \frac{1}{n^2}\left|\frac{2n^3x^2}{(1+n^3x^2)^2}\right| = \frac{1}{n^2}\left|g(n^3x^2)\right| \leq \frac{1}{n^2}\|g\|_\infty ,$$

wobei $g : [0,\infty) \to \mathbb{R}$, $y \mapsto \frac{2y}{(1+y)^2}$. Wegen

$$\left|\frac{2y}{(1+y)^2}\right| = 1 - \frac{y^2+1}{(1+y)^2} \leq 1 \qquad \forall y \in [0,\infty),$$

ist $\|g\|_\infty \leq 1$. Also ist $f_n \rightrightarrows 0$ auf $[0,1]$ für $n \to \infty$. Nach Satz im Abschnitt 12.15 des Skriptes gilt

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx = 0.$$

(ii) Es gilt

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{1}{1+nx}dx = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left[\ln(1+nx)\right]_{x=0}^1 = \lim_{n\to\infty} \frac{\overbrace{\ln(1+n)}^{\to\infty}}{\underbrace{n}_{\to\infty}} \overset{\text{l'Hospital}}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{1+n}}{\underbrace{1}_{\neq 0}} = 0.$$

□

Aufgabe 66: Siehe Lösungen im handschriftlichen Mitschrieb zur Hörsaalübung.

Aufgabe 67:

(i) Es handelt sich bei der Differentialgleichung um eine Differentialgleichung mit getrennten Veränderlichen. Löse formal (vgl. Abschnitt 13.4 des Skriptes)

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= -e^y \frac{1}{1+x^2} \\ \rightsquigarrow e^{-y}dy &= \frac{-1}{1+x^2}dx \\ \rightsquigarrow \int_{-\ln(\pi/4)}^{y(x)} e^{-\eta}d\eta &= \int_0^x \frac{1}{1+\xi^2}d\xi \\ \Rightarrow -\left[e^{-\eta}\right]_{\eta=-\ln(\pi/4)}^{y(x)} &= -\left[\arctan(\xi)\right]_{\xi=0}^x \\ \Leftrightarrow e^{-y(x)} &= \arctan(x) + \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

Beachte, dass wir nun den logarithmus bilden wollen. Die rechte seite ist positiv falls $x > \tan(-\pi/4) = -1$¸ Damit ist $y : (-1,\infty) \to \mathbb{R}$ mit $y(x) = \ln(\arctan(x) + \frac{\pi}{4})$ die maximale Lösung.

(ii) Es handelt sich bei der Differentialgleichung um eine lineare Differentialgleichung erster Ordnung (siehe Abschnitt 13.3 des Skriptes). Berechne

$$A(x) = \int_0^x 2tdt = x^2,$$

sowie

$$\int_0^x e^{-A(s)} sds = \left[-\frac{1}{2}e^{-s^2}\right]_{s=0}^x = \frac{1}{2}\left(1 - e^{-t^2}\right).$$

Nach der Variation-der-Konstanten-Formel ist

$$y(x) = \frac{1}{2}e^{x^2} + e^{x^2}\int_0^t e^{-s^2} s\mathrm{d}s = e^{x^2} - \frac{1}{2}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ die maximale Lösung des Anfangswertproblems.

□

Aufgabe 68:

(i) Es handelt sich bei der Differentialgleichung um eine Differentialgleichung mit getrennten Veränderlichen. Löse formal (vgl. Abschnitt 13.4 des Skriptes)

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= xe^{-x}y^2 \\
\rightsquigarrow \frac{1}{y^2}dy &= xe^{-x}dx \\
\rightsquigarrow \int_1^{y(x)} \frac{1}{\eta^2}d\eta &= \int_0^x \xi e^{-\xi} d\xi \\
\Rightarrow -\left[\frac{1}{\eta}\right]_{\eta=1}^{y(x)} &= -\left[\xi e^{-\xi}\right]_{\xi=0}^x + \int_0^x e^{-\xi}d\xi = -\left[\xi e^{-\xi}\right]_{\xi=0}^x - \left[e^{-\xi}\right]_{\xi=0}^x \\
\Leftrightarrow y(x) &= \frac{e^x}{1+x}.
\end{aligned}$$

Dabei ist $x \in I = (-1, \infty)$ — das größte Intervall mit $0 \in I$ und $y(x) \neq 0$ für alle $x \in I$.

Dieses y ist die maximale Lösung, denn y lässt sich wegen $\lim_{x \to -1+} y(x) = \infty$ nicht stetig nach links fortsetzen.

(ii) Es handelt sich bei der Differentialgleichung um eine lineare homogene Differentialgleichung erster Ordnung (siehe Abschnitt 13.3 des Skriptes). Berechne

$$A(x) := \int_0^x s + \frac{2}{1+s^2}\mathrm{d}s = \left[\frac{1}{2}s^2 + 2\arctan(s)\right]_{s=0}^x = \frac{x^2}{2} + 2\arctan(x).$$

Nach der Variation-der-Konstanten-Formel ist

$$y(x) = e^{\frac{x^2}{2} + 2\arctan(x)}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ die maximale Lösung des Anfangswertproblems.

□