Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Analysis
apl. Prof. Dr. Peer Christian Kunstmann
Marvin Schulz, M.Sc.

WS2024/25
31.01.2025

Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Physik

12. Übungsblatt

Aufgabe 68: [Anfangswertprobleme ODE 1.Ordnung **T**]
Bestimmen Sie die maximale Lösung der Anfangswertprobleme

(i) $y' = -y^2$, mit $y(0) = -1$, sowie

(ii) $y' = y + x + 1$, mit $y(0) = 0$.

Aufgabe 69:
Bestimmen Sie die maximale Lösung der Anfangswertprobleme

(i) $y' = \frac{\sin(y)}{x}$, mit $y\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$, sowie

(ii) $y' = -\frac{2}{1-x}y + \frac{1}{1-x}$, mit $y(0) = 0$.

Aufgabe 70: [Anfangswertprobleme ODE 2.Ordnung **T**]
Bestimmen Sie die Lösung der Anfangswertprobleme

(i) $y'' + 2y' + 2y = e^{-x}\cos(x)$, $x \in \mathbb{R}$, mit $y(0) = y'(0) = 0$, sowie

(ii) $y'' - 2y' + y = e^x$, $x \in \mathbb{R}$, mit $y(0) = 1$ und $y'(0) = 2$.

Aufgabe 71:
Bestimmen Sie die Lösung der Anfangswertprobleme

(i) $y'' + y' + \frac{y}{4} = e^{-\frac{x}{2}}$, $x \in \mathbb{R}$, mit $y(0) = y'(0) = 1$, sowie

(ii) $y'' - 2y' = -2x + \sin(2x)$, $x \in \mathbb{R}$, mit $y(0) = \frac{1}{8}$ und $y'(0) = 0$.

Aufgabe 72: [Konvergenz uneigentlicher Integrale **T**]
Untersuchen Sie die Konvergenz der uneigentlichen Integrale

(i) $\int_2^\infty \frac{1}{x(\ln(x))^2}\,\mathrm{d}x$,

(ii) $\int_0^1 \frac{1}{2\sqrt{x}-x^2}\,\mathrm{d}x$, sowie

(iii) $\int_1^\infty \frac{1+\frac{1}{2}(\cos(x))^{2017}}{x}\,\mathrm{d}x$.

Aufgabe 73:
Untersuchen Sie die Konvergenz der uneigentlichen Integrale

(i) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{\sin(x)} - \frac{1}{x}\right) \mathrm{d}x$,

(ii) $\int_0^{\infty} e^{-x} \ln(1+x)\mathrm{d}x$, sowie

(iii) $\int_0^{\infty} \frac{x \ln(x)}{\sinh(x)-x}\mathrm{d}x$.

Aufgabe 74: [Fibonacci-Folge **T**]
Es sei

$$U = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} : \forall n \in \mathbb{N} : x_{n+2} = x_{n+1} + x_n\}$$

sowie

$$\Phi : U \to \mathbb{R}^2, \quad (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

(i) Zeigen Sie, dass U ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ ist.

(ii) Bestimmen Sie alle $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ mit $(\lambda^n)_{n\in\mathbb{N}} \in U$.

Aufgabe 75: [Fibonacci-Folge **T**]
Es sei

$$U = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} : \forall n \in \mathbb{N} : x_{n+2} = x_{n+1} + x_n\}$$

sowie

$$\Phi : U \to \mathbb{R}^2, \quad (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

(i) Zeigen Sie, dass U ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ ist.

(ii) Bestimmen Sie alle $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ mit $(\lambda^n)_{n\in\mathbb{N}} \in U$.

Aufgabe 76: Beispiele aus der Physik:

i) *Demtröders Güterzug:* Ein Güterzug rollt Reibungsfrei mit der masse $m_0 > 0$ und $v_0 > 0$ zum Zeitpunkt $t = 0$ in eine Beladestation ein. Er wird von einer feststehenden Ladevorrichtung aus von oben kontinuierlich mit Sand beladen so, dass sein Massenzuwachs $\dot{m} = A > 0$ zeitlich konstant ist. Wenn wir die Reibung vernachlässigen, wirkt die Gesamtkraft Null auf den Zug. Es gilt Newtons Bewegungsgleichung $0 = F = \dot{p}$ wobei $p = mv$ der Impuls. Zeigen Sie, dass der Güterzug zum Zeitpunkt $t = m_0/A$ seine Geschwindigkeit halbiert hat.

ii) *Gravitationstunnel:* Angenommen es gäbe einen Tunnel durch den Mittelpunkt der Erde der in einer geraden Linie verläuft und man springt in diesen. Die Beschleunigung die auf einen wirkt folgt dem Gesetz

$$\ddot{r} = a = -\frac{GM}{r^2} = -\frac{G\rho V}{r^2} = -\frac{G\rho\frac{4}{3}\pi r^3}{r^2} = -G\rho\frac{4}{3}\pi r \tag{1}$$

wobei r der Abstand zum Erdmittelpunkt, G die Gravitationskonstante, ρ die Dichte der Erde und V das Volumen der Erde ist. (Wir haben angenommen, dass die Erde konstante Dichte hat und eine perfekte Kugel ist.) Es wirkt also die Kraft

$$F = m\ddot{r} = -mG\rho\frac{4}{3}\pi r$$

auf einen fallenden Körper der masse $m > 0$. Es handelt sich also um ein lineares Kraftgesetz. Bestimmen Sie die Schwingfrequenz mit dem der fallende Körper um den Erdmittelpunkt schwingt.
Angenommen der fallende Körper hat einen Fallschirm, dann gilt für die Beschleunigung

$$a = -\delta\dot{r} - G\rho\frac{4}{3}\pi r$$

für ein $\delta > 0$. Bestimme $\delta \in \mathbb{R}$ so, dass der Fallende Körper am Erdmittelpunkt ankommt ohne an diesem vorbei zu schwingen.